

SÉRIE A, N° 4064

N° D'ORDRE : 4915

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. BAKTAVATSALOU

1^{re} THÈSE. — Etude sur l'interprétation physique
des opérateurs de la mécanique quan-
tique relativiste des particules à spin.

2^e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 mai 1963 devant la Commission d'Examen.

M. A. LICHNEROWICZ	}	<i>Président.</i>
M ^{me} M.-A. TONNELAT		<i>Examineurs.</i>
M. E. ARNOUS		
M. G. PETIAU		

Éditions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS 15^e

1963



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A, N° 4064

N° D'ORDRE : 4915

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. BAKTAVATSALOU

1^{re} THÈSE. — Etude sur l'interprétation physique
des opérateurs de la mécanique quan-
tique relativiste des particules à spin.

2^e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 mai 1963 devant la Commission d'Examen.

M. A. LICHNEROWICZ	{	<i>Président.</i>
M ^{me} M.-A. TONNELAT		<i>Examineurs.</i>
M. E. ARNOUS		
M. G. PETIAU		

Éditions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS 15^e

1963



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Dogen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	NORMANT	T	Synthèse organique générale.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	BÉNARD	T	Chimie minérale.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appl.
TEISSIER	T	Zoologie.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).	CHADEFAUD	T	Botanique.
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.
MONNIER	T	Physiologie générale.	SALEM	T	Mathématiques générales.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	LELONG	T	Applications de l'analyse à la géométrie.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).	DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
COULOMB	T	Physique du Globe.	GODEMENT	T	Mathématiques (M. P. C.).
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.).	PISOT	T	Techniques mathém. de la Physique.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	ROCH	T	Géologie.
DRACH	T	Zoologie.	SCHATZMAN	T	Astrophysique.
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).	TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
EPHRUSSI	T	Génétique.	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
RIVIÈRE	T	Géologie (S. P. C. N.) et sédim.	LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P. C. B.).	RIZET	T	Génétique (Orsay).
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.	M ^{me} TONNELAT	T	Physique Théorique.
ARNULF	T	Optique appliquée.	DIXMIER	T	Mathématiques (M. P. C.).
MORAND	T	Physique Enseignement.	SOUGHAY	T	Chimie générale.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).	AIGRAIN	T	Electrotechnique générale.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	BRUSSET	T	Chimie systématique.
DANJON	T	Astronomie.	M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
PEITIT	T	Biologie maritime.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
QUENÉY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	M ^{me} HUREL-PY	T	Biologie végétale (P. C. B.).
GALLIEN	T	Embryologie.	PIAUX	T	Chimie (M. P. C.).
FICHHORN	T	Botanique.	BRUN	T	Mécanique théorique des Fluides.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	LEDERER	T	Chimie biologique.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie Physique.	M ^{me} DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation).
THELLIER	T	Physique du Globe.	M ^{me} LE LONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay).	BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).	COTTE	T	Physique électricité.
PONCIN	T	Mécanique générale.	DUBOIS J.-E.	T	Chimie organique.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.	LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
QUELET	T	Chimie organique.	MICHEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay).
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	OLMER	T	Energétique générale.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.	ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
JUNG	T	Pétrographie.	BARCHI-WITZ	T	Chimie Physique.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.	BROSSEL	T	Physique atomique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.	BUSER	T	Physiologie comparée.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).	CAMUS	T	Physiol. Vég. B.M.P.V.
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.	CASTANG	T	Physique (Orsay).
DESTOUCHES	T	Théories physiques.	CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
AMIEL	T	Chimie générale.	MOYSE	T	Physiologie vég. (Orsay).
HOCART	T	Minéralogie et Cristallogr.	NOTROT	T	Evolution des Etres org.
MATHIEU J.-P.	T	Physique (Optique).	PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay).
COUTEAUX	T	Biologie animale (P. C. B.).	POSSOMPES	T	Zoologie.
MAY	T	Zoologie (Orsay).	PULLMANN	T	Chimie théorique.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.	TEILLAC	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.	TONNELAT	T	Biologie physico-chimique.
GUINIER	T	Physique des Solides (Ors.).	VILLE	T	Econometrie.
JOST	T	Physiologie comparée.	WILLEMART	T	Chimie (P. C. B.).
FORTET	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	DODÉ	T	Chimie (Orsay).
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et intégral.	FREYMANN	T	Recherches Physiques.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.	GUENOCHET	T	Biol. Vég. S.P.C.N. (Orsay).
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).	ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral.	M ^{me} JOSTEN	T	Chimie (S. P. C. N.).
			CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
			ARNULT	T	Electronique (Orsay).

(suite en dernière page)



ÉTUDE SUR L'INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES OPÉRATEURS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE DES PARTICULES À SPIN

PAR

M. BAKTAVATSALOU

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'introduction de la relativité restreinte en mécanique quantique, faite d'abord par Dirac en 1928, a posé deux problèmes :

1^o obtenir les équations non relativistes comme approximations des équations relativistes ;

2^o définir et interpréter les opérateurs des théories relativistes.

Le premier problème fut résolu pour les électrons à l'approximation de $1/m$ par Pauli [27]. Quant au second, il a été résolu, également pour les électrons, par Foldy & Wouthuysen [19] en 1950. En fait, ces auteurs ont résolu pour les électrons ces deux problèmes.

Dans l'étude du deuxième problème, intervient un opérateur ambigu : celui de la position. En effet, le passage de la mécanique quantique non relativiste à la mécanique relativiste fait perdre à la notion de position sa signification habituelle. Ce problème semble être posé, d'après A. S. Wightman, déjà dès le début de la mécanique quantique. Mais l'attention des physiciens étant alors tournée vers les problèmes de la théorie quantique des champs, la définition de l'opérateur de position pour les particules relativistes a été laissée sans solution jusqu'en 1949. A cette date en effet, apparaît un important travail de Newton & Wigner [44]. Ceux-ci déterminent l'opérateur de position pour des systèmes élémentaires qui sont, en quelque sorte, une généralisation des particules élémentaires. Cet opérateur s'obtient en partant de la notion des états localisés en un point et un temps donnés de ces systèmes élémentaires. Ils obtiennent ainsi un opérateur de position dans l'espace tridimensionnel pour un système de spin quelconque et de masse non nulle et cet opérateur se révèle être une observable. Ce travail de Newton & Wigner a été généralisé très récemment en 1962, par A. S. Wightman [45]. Celui-ci essaye de résoudre le problème très général de la localisation d'un système en mécanique quantique, non en un point mais en une région de l'espace.

En 1948, Pryce [29], partant des considérations sur le centre de masse en relativité restreinte, a obtenu des opérateurs covariants ou observables pour

les particules de spin 0, $\hbar/2$ ou $\hbar$. Un peu plus tard en 1950, Foldy & Wouthuysen [19], dans un important mémoire sur l'approximation non relativiste de l'équation de Dirac, déterminent les différentes observables de la théorie de Dirac ; ils nomment ces observables « opérateurs moyens ».

Ce sont donc ces travaux qui sont à l'origine de nos recherches. Nous avons essayé de résoudre, dans cette étude, les deux problèmes posés au début de cette introduction, d'une façon générale, pour les particules de spin $\hbar/2$, 0, $\hbar$ ou de spin quelconque.

Dans le chapitre I consacré aux électrons, soit libres, soit placés dans un champ électromagnétique extérieur, nous étudions en détail l'approximation non relativiste de l'équation de Dirac par diverses méthodes ainsi que la détermination de différentes transformations unitaires susceptibles de donner des observables. Une étude comparée des travaux sur ce sujet est également effectuée dans ce chapitre.

Dans le chapitre II consacré aux bosons de spin 0 ou $\hbar$ nous étudions le formalisme réduit de Petiau-Duffin-Kemmer [37, 38] ainsi que le formalisme de L. de Broglie [2]. Dans le premier cas, nous montrons l'existence d'une transformation unitaire permettant l'étude non relativiste des équations et nous déterminons l'opérateur de position ; ce travail généralise un mémoire de Feshbach & Villars publié en 1958 sur les bosons de spin 0 [34]. Quant au deuxième cas, nous montrons l'existence d'une transformation unitaire, analogue à celle de Foldy & Wouthuysen et nous retrouvons les résultats de notre travail du troisième cycle en 1959 [32].

Enfin dans le chapitre III nous considérons une particule de spin quelconque et de masse non nulle, décrite par la méthode de fusion et donnée sous une forme bien appropriée par G. Petiau [43]. Nous montrons comme précédemment l'existence d'une transformation unitaire, analogue à celle de Foldy & Wouthuysen, qui permet le calcul de l'opérateur de position. Nous déterminons également les fonctions d'onde caractéristiques de la particule. Nous comparons ensuite l'opérateur de position ainsi obtenu à celui de Newton & Wigner. Nous montrons que la divergence des résultats est due à la différence des définitions pour la densité de probabilité de présence. Les résultats sont néanmoins identiques dans le cas particulier des électrons.

Nous allons donc montrer, dans les pages qui suivent, comment il convient d'affecter aux particules de spin $\hbar/2$, 0, $\hbar$ ou de spin quelconque certains opérateurs qui soient des observables.

Notation. — Nous admettons la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés et nous poserons partout $\hbar = c = 1$.

I. PARTICULES DE SPIN $1/2$:

les théories réduites à deux composantes et l'interprétation physique des opérateurs de la théorie de Dirac

1. **Introduction.** — La théorie relativiste des particules chargées de spin $1/2$ est entièrement fondée sur l'équation de Dirac [14]. Celle-ci doit une grande part de son succès à l'explication de la structure fine des raies spectrales de l'atome d'hydrogène ; cette structure fine est en effet interprétée comme résultant, d'une

part, de la variation de la masse avec la vitesse et, d'autre part, du spin de l'électron.

L'équation de Dirac, utilisant une fonction d'onde à quatre composantes, semble bien adaptée au problème de la description des particules de spin $1/2$. Avant l'invention de cette théorie, Pauli a fait une première tentative [26] en 1927 en utilisant une fonction d'onde à deux composantes; la principale différence entre ces deux théories est que la première présente la covariance relativiste alors que la seconde est non relativiste. Il est alors tout naturel de penser déduire la seconde de la première. C'est ce que fit Pauli lui-même en 1933 [27]. La méthode utilisée par celui-ci sépare les « grandes » des « petites » composantes et elle permet à l'approximation où l'on néglige des termes de l'ordre de $(1/m)^2$ de retrouver la première formulation de Pauli. Avec une méthode légèrement différente nous pouvons également obtenir une équation d'approximation non relativiste à l'ordre de $(1/m)^2$ et retrouver ainsi celle obtenue par Bethe & Salpeter [1]. Cette équivalence de la théorie de Dirac et de celle de Pauli à l'approximation non relativiste n'est pourtant pas complète essentiellement pour les deux principales raisons suivantes :

a) si on poursuit l'approximation à un ordre quelconque de $1/m$ par une méthode dérivée de celle de Pauli, on arrive à un hamiltonien dont le caractère hermitien n'est pas défini ;

b) les observables de la particule, représentées par les mêmes opérateurs dans les deux théories, n'ont pas les mêmes propriétés. Ainsi par exemple, l'opérateur vitesse chez Dirac est $\vec{\alpha}$ dont les valeurs propres sont ± 1 alors que la vitesse chez Pauli est $\vec{p}/m$ dont les valeurs propres sont tous les nombres réels. D'autre part, les composantes de l'opérateur vitesse ne commutent pas entre elles dans la théorie de Dirac et ne sont donc pas simultanément mesurables, alors que ces composantes commutent en théorie de Pauli et sont donc mesurables simultanément avec une précision arbitraire.

Il est alors permis de penser que le passage de la fonction d'onde à quatre composantes à la fonction d'onde à deux composantes à l'approximation non relativiste par la méthode de Pauli ne suffit pas pour décrire toutes les propriétés physiques de la particule. Il faut peut-être trouver une autre méthode pour établir d'une part l'équivalence de ces deux théories et d'autre part l'interprétation physique des principaux opérateurs dynamiques. C'est ce que nous allons tenter de faire dans le présent travail en prenant comme point de départ l'intéressant mémoire de L. L. Foldy & S. A. Wouthuysen (FW) [19] paru en 1950.

Dans ce chapitre, après avoir introduit les différentes notations de la théorie de Dirac, nous exposerons, en première partie, la théorie réduite à deux composantes, déduite de la théorie de Dirac à l'approximation de $1/m$ et $(1/m)^2$ par la méthode des « grandes » et des « petites » composantes, puis par la méthode de FW. Nous étudierons d'une façon plus étendue cette dernière méthode et nous examinerons également le cas où la particule possède un moment magnétique anormal.

En deuxième partie nous considérerons l'interprétation physique des opérateurs dynamiques de la théorie de Dirac en calculant leurs transformés par les différentes transformations unitaires examinées précédemment. Nous comparerons nos résul-

tats à d'autres résultats partiels de Pryce [29], Bose, Gamba & Sudarshan [10], etc. Nous montrerons finalement que ces différentes transformations considérées peuvent être obtenues d'une façon générale par une transformation de Cayley [6].

2. Théorie de l'électron de Dirac. — 1. *Notation hamiltonienne de l'équation de Dirac.* — Nous écrivons l'équation d'onde de Dirac représentant un électron placé dans un champ électromagnétique sous la forme

$$(I.1) \quad H\psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t)$$

où H est l'hamiltonien de l'électron :

$$(I.2) \quad H = \beta m + \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) - e \varphi ;$$

φ et $\vec{A}$ sont les potentiels scalaire et vectoriel du champ électromagnétique ; $\vec{\alpha}$ et β sont les matrices hermitiennes 4×4 de Dirac qui satisfont à la relation

$$(I.3) \quad \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2 \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \text{ et } \alpha_4 = \beta),$$

où $\delta_{\mu\nu}$ est le symbole de Kronecker.

2. Notations covariantes de l'équation de Dirac. — Nous distinguerons deux formalismes covariants : covariance d'univers et covariance d'espace-temps.

A) COVARIANCE D'UNIVERS. — Définissons alors les quadrivecteurs suivants :

$$(I.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_\mu (\vec{A}, -i \varphi) & \text{pour les potentiels électromagnétiques,} \\ x_\mu (\vec{x}, i t) & \text{pour les coordonnées d'univers de l'électron,} \\ p_\mu (\vec{p}, i E) & \text{pour le quadrivecteur d'impulsion-énergie,} \\ \gamma_\mu (-i \beta \vec{\alpha}, \beta) & \text{pour les matrices de Dirac.} \end{array} \right.$$

Les matrices γ_μ sont hermitiennes et satisfont à la relation

$$(I.5) \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 \delta_{\mu\nu}.$$

L'équation (I.1) devient alors

$$(I.6) \quad \{ \Pi_\mu \gamma_\mu - i m \} \psi(x_\mu) = 0,$$

où

$$(I.7) \quad \Pi_\mu = p_\mu - e A_\mu.$$

B) COVARIANCE D'ESPACE-TEMPS. — Définissons dans ce cas les quadrivecteurs par les expressions suivantes :

$$(I.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_\mu (\vec{A}, \varphi) & \text{pour les potentiels électromagnétiques,} \\ x^\mu (\vec{x}, t) & \text{pour les coordonnées d'espace-temps de l'électron,} \\ p_\mu (\vec{p}, -E) & \text{pour le moment d'impulsion-énergie,} \\ \gamma^\mu (\beta \vec{\alpha}, \beta) & \text{pour les matrices de Dirac.} \end{array} \right.$$

Les matrices γ^μ satisfont à la relation

$$(I.9) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu},$$

où le tenseur fondamental $g^{\mu\nu}$ est tel que $g^{kk} = -1$, $g^{44} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ et les matrices γ^k sont antihermitiennes ($k = 1, 2, 3$).

L'équation (I.4) devient alors

$$(I.10) \quad \{ \Pi_\mu \gamma^\mu + m \} \psi(x_\mu) = 0.$$

Ces différentes formes de l'équation de Dirac sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Essayons maintenant d'obtenir à partir d'une de ces formes une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, le principal intérêt de ce calcul étant l'obtention de l'équation de Klein-Gordon.

Partons en effet de l'équation (I.6) en notation covariante d'univers, multiplions-la à gauche par la quantité conjuguée $\Pi_\mu \gamma_\mu + i m$ et écrivons alors les champs électrique et magnétique $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ sous forme d'un tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ défini par les expressions

$$(I.11) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{k1} = \mathcal{H}_i, \quad F_{i4} = -i \mathcal{E}_i.$$

Nous obtenons alors

$$(I.12) \quad \left\{ \Pi_\mu \Pi_\mu + m^2 - \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right\} \psi(x_\mu) = 0,$$

où $\sigma_{\mu\nu} = -i \gamma_\mu \gamma_\nu$. Ainsi, si le champ extérieur disparaît, l'équation (I.12) donne l'équation de Klein-Gordon $\{ \Pi_\mu \Pi_\mu + m^2 \} \psi(x_\mu) = 0$.

Le dernier terme de (I.12) est donc caractéristique de la théorie de Dirac ; il représente l'interaction du champ électromagnétique avec le moment dipolaire magnétique ou électrique, appelé couramment « moment électromagnétique de l'électron » de Dirac.

Ecrivons maintenant explicitement les deux représentations, appelées représentation principale (ou non relativiste) et représentation extrême-relativiste, des matrices $\vec{\alpha}, \beta, \vec{\gamma}$ de Dirac en utilisant les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

qui satisfont à $\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} + i \epsilon_{ikl} \sigma_l$ avec

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} +1 & \text{si } ikl \text{ est une permutation paire de } 123 \\ -1 & \text{si } ikl \text{ est une permutation impaire de } 123 \\ 0 & \text{si deux des indices sont égaux} \end{cases}$$

a) Représentation principale. —

$$(I.13a) \quad \begin{cases} \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, & \vec{\gamma} = -i \beta \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \\ \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, & \gamma_4 = \beta = \rho_3, \\ \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = -\rho_1 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \\ \vec{\alpha} = \vec{\sigma} \rho_1, & \rho_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

b) *Représentation extrême-relativiste.* —

$$(I.13b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}, \quad \vec{\gamma} = -i \beta \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & i \vec{\sigma} \\ -i \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \\ \beta = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_4 = \beta = \rho_3, \\ \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = -\rho_1 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ \vec{\alpha} = \vec{\sigma} \rho_1, \quad \rho_2 = \begin{bmatrix} 0 & i I \\ -i I & 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

3. **Les théories réduites à deux composantes.** — Différentes théories à deux composantes ont été déduites de la théorie de Dirac, notamment par :

1) la méthode des « grandes et « petites » composantes ;

2) la méthode de Foldy & Wouthuysen.

Nous allons étudier successivement ces méthodes.

1. *Méthode des « grandes » et « petites » composantes.* — Nous allons établir les équations réduites à deux composantes de la particule, en notation hamiltonienne, à l'approximation $1/m$ et à l'approximation $(1/m)^2$.

A) A L'APPROXIMATION $1/m$. — Considérons l'équation de Dirac (I.1) et ses solutions de la forme

$$(I.14) \quad \psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \exp(-i E t) \quad (E > 0).$$

Posons alors, avec la représentation principale (I.13a),

$$(I.15) \quad \psi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} u_g \\ u_p \end{bmatrix},$$

où $u_g = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ et $u_p = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$ sont appelées respectivement les fonctions d'onde spinorielles à grandes (g) et petites (p) composantes. Alors (I.1) s'écrit

$$(I.16) \quad \begin{aligned} (E - m + e \varphi) u_g &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) u_p, \\ (E + m + e \varphi) u_p &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) u_g. \end{aligned}$$

Nous supposons que le champ électromagnétique est faible et statique. Remarquons tout de suite que ce découplage de ψ en u_p et u_g est essentiellement lié à la représentation principale (I.13a).

A la limite non relativiste, la deuxième équation de (I.16) donne

$$(I.17) \quad u_p \sim \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A})}{2m} u_g.$$

Nous obtenons alors, au terme de masse près, l'équation suivante :

$$(I.18) \quad E u_g = \left\{ \frac{(\vec{p} - e \vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}}) - e \varphi \right\} u_g.$$

C'est l'équation bien connue de Pauli à deux composantes.

B) A L'APPROXIMATION $(1/m)^2$. — Partons de l'équation (I.12) qui, compte tenu de $F_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}} - 2 \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{E}}$, s'écrit ici

$$(I.19) \quad \{ (\vec{p} - e \vec{A})^2 - (E + e \varphi)^2 + m^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathcal{E}} \} \psi = 0.$$

En tenant compte de (I.17), nous obtenons

$$(I.20) \quad (\vec{\alpha} \psi)_g = \vec{\sigma} u_p \sim \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e \vec{A})}{2m} u_g.$$

L'équation (I.19) s'écrit finalement

$$(I.21) \quad E u_g = \left\{ \frac{(\vec{p} - e \vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}}) - e \varphi + \right. \\ \left. + \frac{i e}{4m^2} \vec{\mathcal{E}} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) - \frac{e}{4m^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{E}} \wedge (\vec{p} - e \vec{A}) \right\} u_g.$$

Remarquons que l'équation (I.18) est contenue dans (I.21).

L'équation (I.21) se réduit à celle établie par Bethe & Salpeter [1] dans la formule (12.11), sec. 12, lorsque l'on consent d'y négliger $e \vec{A}$ devant $\vec{p}$ dans les deux derniers termes et de poser $W = E - m$.

2. *Méthode de Foldy & Wouthuysen*. — Foldy & Wouthuysen ont proposé en 1950 [19] une autre méthode pour déduire de la théorie de Dirac une théorie réduite à deux composantes sans aucune approximation lorsque la particule est libre et à une approximation d'un ordre quelconque de $1/m$ lorsque la particule est soumise à un champ extérieur. C'est donc une méthode générale qui englobe en particulier la précédente.

Cette méthode consiste essentiellement à effectuer sur les fonctions d'onde et les opérateurs de la théorie de Dirac une transformation unitaire convenablement choisie. On passe ainsi à une nouvelle représentation où les petites et les grandes composantes sont découplées en l'absence de champ extérieur.

Ce découplément est essentiellement fondé sur la séparation des opérateurs-matrices en opérateurs « pairs » et opérateurs « impairs ». Les opérateurs pairs et impairs ont été introduits pour la première fois en 1931 par E. Schrödinger [30]. Un opérateur-matrice de la théorie de Dirac est dit pair s'il ne contient pas des éléments susceptibles de relier les petites et les grandes composantes de la fonction d'onde, tandis qu'un opérateur impair est celui qui a de tels éléments de matrice. Ainsi, avec la représentation principale (I.13a), les opérateurs pairs sont $I, \beta, \sigma, \beta \sigma$ et les opérateurs impairs sont $\alpha, \beta \alpha, \rho_1, \rho_2$.

D'après cette définition et du fait que l'hamiltonien contient des matrices impaires, nous voyons pourquoi la théorie de Dirac nécessite une fonction d'onde à quatre composantes pour décrire un état à énergie positive ou négative. FW ont alors cherché une transformation unitaire qui, appliquée à l'équation de Dirac, la met sous une forme ne contenant que des matrices paires. Si cela est possible, on peut représenter chaque état d'énergie par une fonction d'onde à deux composantes.

Nous allons distinguer trois cas : A) particule libre ; B) particule placée dans un champ électromagnétique ; C) particule douée d'un moment magnétique anormal et placée dans un champ électromagnétique.

A) TRANSFORMATION DE FW POUR UNE PARTICULE LIBRE. — Dans la représentation de FW, la nouvelle fonction d'onde est définie par

$$(I.22) \quad \psi'(\vec{x}, t) = U(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t),$$

où $U(\vec{x}, t)$ est une transformation unitaire. Alors l'équation de Dirac (I.1) devient

$$(I.23) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \psi' = H' \psi', \quad \text{avec} \quad H' = U H U^{-1} - i U \frac{\partial}{\partial t} U^{-1}.$$

Soit $\Lambda_{\pm}^D = \frac{1}{2} [1 \pm (H/E)]$, où $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, les opérateurs de projection sur l'espace des états à énergie positive et à énergie négative. On cherchera à déterminer U de façon à transformer ces opérateurs en d'autres opérateurs de projection $\Lambda_{\pm}^C = \frac{1}{2} (1 \pm \beta)$ sur l'espace des fonctions d'onde positive ou négative à deux composantes $\psi = \psi_+ + \psi_-$ avec $\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ et $\psi_- = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$.

Pour cela il faut qu'on ait les relations

$$U U^{-1} = U^{-1} U = 1, \quad \Lambda_{\pm}^C = U \Lambda_{\pm}^D U^{-1}.$$

On vérifie qu'une telle transformation est fournie par

$$(I.24) \quad U = \exp \left[-\frac{i}{2} \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \arctan \left(\frac{p}{m} \right) \right] = \frac{E + m + \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{\sqrt{2 E (E + m)}}.$$

Cette transformation est également donnée par Pryce [29] et Tani [20]. L'hamiltonien transformé devient alors $H' = U H U^{-1} = \beta E$. Les nouvelles fonctions d'onde ψ'_+ et ψ'_- sont bien découplées dans cette représentation :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi'_+ = E \psi'_+, \quad i \frac{\partial}{\partial t} \psi'_- = -E \psi'_-.$$

Si on se limite aux solutions d'énergie positive, c'est-à-dire aux solutions classiques, la théorie de Dirac est équivalente à la théorie à deux composantes de Pauli.

La fonction d'onde transformée s'écrit également

$$(I.25) \quad \psi'(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\vec{x}, \vec{x}') \psi(\vec{x}') d\vec{x}',$$

où

$$K(\vec{x}, \vec{x}') = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2E}{E + m} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{m}{E} \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \right\} \exp[i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{p}.$$

$K(\vec{x}, \vec{x}')$ est donc une fonction de $\vec{x} - \vec{x}'$ et a une valeur non négligeable si $\vec{x} - \vec{x}'$ reste inférieur ou égal à la longueur d'onde de Compton $1/m$. La transformation de FW est donc une transformation non locale.

B) PARTICULE PLACÉE DANS UN CHAMP EXTÉRIEUR. — Quand les particules de Dirac sont soumises à des champs électromagnétiques extérieurs, il ne semble pas exister une transformation unitaire simple et on a alors recours à des approximations successives. C'est ainsi que Foldy & Wouthuysen ont étudié le problème de l'interaction de la particule de Dirac avec le champ électromagnétique statique à l'approximation $(1/m)^2$.

En utilisant la même méthode que FW, nous établissons d'abord [7] la formule générale de l'hamiltonien de Dirac débarrassé de ses matrices impaires à l'approximation $(1/m)^4$ et nous l'appliquons au cas d'interaction électromagnétique non statique.

a) *Formule générale de l'hamiltonien de Dirac débarrassé des matrices impaires à l'approximation $(1/m)^4$.* — Considérons (I.22) et posons $U = e^{iS}$, où S est un opérateur hermitien dépendant explicitement du temps. La deuxième relation (I.23) devient

$$\begin{aligned} H' &= e^{iS} H e^{-iS} - i e^{iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{-iS} \\ &= H - \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{i}{1!} \left[S, H - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] - \frac{i^2}{2!} \left[S, \left[S, H - \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] + \dots \end{aligned}$$

Quand la particule est placée dans un champ extérieur, l'hamiltonien peut toujours se mettre sous la forme $H = \beta m + \varepsilon + o$, où ε, o sont respectivement les opérateurs pairs et impairs pouvant dépendre explicitement du temps. Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} (I.26) \quad H' &= \beta m + \varepsilon + \left\{ \frac{1}{2m} \beta o^2 - \frac{1}{3m^2} o^3 - \frac{1}{8m^3} \beta o^4 + \frac{1}{30m^4} o^5 + \dots \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{(1! 2^1) m} \beta [o, \varepsilon] - \frac{1}{(2! 2^2) m^2} [o, [o, \varepsilon]] - \frac{1}{(3! 2^3) m^3} \beta [o, [o, [o, \varepsilon]]] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{(4! 2^4) m^4} [o, [o, [o, [o, \varepsilon]]] + \dots \right\} + i \left\{ \frac{1}{(1! 2^1) m} \beta \frac{\partial o}{\partial t} - \frac{1}{(2! 2^2) m^2} \left[o, \frac{\partial o}{\partial t} \right] - \right. \\ &- \frac{1}{(3! 2^3) m^3} \beta \left[o, \left[o, \frac{\partial o}{\partial t} \right] \right] + \frac{1}{(4! 2^4) m^4} \left[o, \left[o, \left[o, \frac{\partial o}{\partial t} \right] \right] \right] + \dots \left. \right\}. \end{aligned}$$

b) *Application au champ électromagnétique non statique.* — L'hamiltonien d'interaction s'écrit alors $H = \beta m + \alpha \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) - e \varphi$ et nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} (I.27) \quad H' &= \beta m - e \varphi + \frac{1}{2m} \beta \{ (\vec{p} - e \vec{A})^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}} \} + \frac{e}{8m^2} \operatorname{div} \vec{E} - \\ &- \frac{e}{8m^2} \{ 2 e \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{A}) - \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{E} - \vec{E} \wedge \vec{p}) + 2 (\vec{p} \wedge \vec{E} \wedge \vec{p} \wedge \vec{A}) - \vec{p} \wedge \vec{E} \wedge \vec{p} \} + \\ &+ \frac{e^2}{8m^3} E^2 - \frac{1}{8m^3} \beta \{ (\vec{p} - e \vec{A})^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}} \}^2 - \\ &- \frac{i e}{12m^4} \beta \{ (\vec{p} - e \vec{A})^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}} \} (\vec{p} - e \vec{A}) \cdot \left(\vec{E} + 2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \\ &+ i \vec{\sigma} \cdot \left\{ (\vec{p} + e \vec{A}) \wedge \left(\vec{E} + 2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right\} - \frac{e^2}{16m^4} \vec{\sigma} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \wedge \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{e^3}{192m^4} \left\{ \left(\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{p} - \vec{p} \wedge \vec{A}) \right\}. \end{aligned}$$

Dans le cas du champ magnétique statique, la formule précédente permet d'établir $H' = \beta \{ m^2 + (\vec{p} - e \vec{A})^2 - e \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}} \}^{1/2}$.

C) PARTICULE DOUÉE D'UN MOMENT MAGNÉTIQUE ANOMAL μ PLACÉE DANS UN

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE. — Suivant Pauli [4] nous écrivons l'équation de Dirac correspondante en coordonnées d'univers de la façon suivante :

$$\{ \pi_\mu \gamma_\mu - i m + \frac{1}{2} \mu F_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \} \psi(x_\mu) = 0.$$

Cette équation s'écrit également

$$E \psi(\vec{x}, t) = \{ \beta m - e \varphi + \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e \vec{A}) - 2 \mu \beta (\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + 2 i \mu \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{C}) \} \psi(\vec{x}, t) = H \psi(\vec{x}, t).$$

En utilisant (I.26) et en considérant le champ électrique central, nous obtenons finalement

$$(I.28) \quad H' = \beta m - e \varphi + \frac{1}{2m} \beta (\vec{p} - e \vec{A})^2 - \left(\frac{e}{2m} + \mu \right) \beta (\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + \frac{1}{2} \frac{1}{m} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(\frac{e}{2m} + \mu \right) (\vec{L} \cdot \vec{\sigma}) + \frac{1}{2m} \frac{\mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{2m} \beta \mu^2 c^2 - \frac{i e}{2m} \mu (\vec{\sigma} \cdot \vec{c}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{A}).$$

Nous voyons ainsi clairement la correction qu'introduit μ dans les couplages spin-champ magnétique et spin-orbite.

4. L'interprétation physique des opérateurs dynamiques de la théorie de Dirac.

— Dans toute cette partie nous ne considérons qu'un électron libre.

Dans la théorie de Dirac il y a des ambiguïtés concernant les opérateurs représentant les observables. Ces opérateurs correspondent en effet, par définition, aux mêmes grandeurs mesurables que celles de la mécanique classique et cette correspondance conduit quelquefois à des opérateurs non hermitiens.

Prenons-en un exemple, l'opérateur de position. Nous allons montrer que cet opérateur n'est pas hermitien, c'est-à-dire $\langle \psi, \vec{x} \Phi \rangle \neq \langle \vec{x} \psi, \Phi \rangle$.

Considérons en effet le produit scalaire covariant dans l'espace des moments

$$\langle \psi, \Phi \rangle = \int_{+E} \frac{dp}{E} \psi^* \Phi.$$

L'intégrale est étendue dans l'espace des $E > 0$ et les fonctions ψ et Φ sont également définies dans cet espace. Alors,

$$(I.29) \quad \begin{aligned} \langle \psi, \vec{x} \Phi \rangle &= i \int_{+E} \frac{dp}{E} \psi^*(p) \vec{\nabla}_p \Phi(p) \\ &= \int_{+E} \frac{dp}{E} \left\{ \left(-i \vec{\nabla}_p + \frac{i \vec{p}}{p^2 + m^2} \right) \psi^*(p) \right\} \Phi(p) \neq \langle \vec{x} \psi, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Dans ce calcul du passage de la première à la deuxième expression de (I.29) nous avons négligé l'intégrale de surface. Donc l'opérateur de position $\vec{x}$ n'est pas hermitien et ne correspond pas à une quantité mesurable.

Nous sommes ainsi amené à reconsidérer tous les opérateurs dynamiques de la théorie de Dirac et à en trouver les grandeurs classiques correspondantes. Pour cette étude, la représentation de FW est particulièrement utile ; elle permet, en effet, de calculer des observables à partir des non-observables. Nous obtenons, en outre, à partir de ces observables des limites d'opérateur que nous assimilerons

à des grandeurs classiques. Nous ferons ensuite la même étude dans une autre représentation, appelée représentation extrême-relativiste. Les opérateurs transformés dans cette représentation pourraient être utiles dans la physique de très hautes énergies. Auparavant, nous allons rappeler quelques résultats de Pryce [29] pour pouvoir les comparer à quelques-uns de nos résultats.

1. *Quelques résultats de Pryce.* — Dans une étude sur la généralisation du centre de masse de la mécanique classique à la mécanique relativiste, Pryce montre :

a) qu'il est possible de définir un centre de masse dépendant du système de référence pour un système de particules ou même à une seule particule ;

b) qu'il existe plusieurs définitions du centre de masse pour ces particules.

Il est ainsi conduit à un système de trois opérateurs suivants : opérateurs observables ; opérateurs covariants ; opérateurs non observables et non covariants.

Soit alors (avec les notations de Pryce) $\vec{x}, \vec{q}, \vec{\tilde{q}}$ des opérateurs de position ; $\vec{S}, \vec{\Sigma}, \vec{\tilde{S}}$ des opérateurs de spin. On a alors le tableau I.

TABLEAU I

$$\begin{aligned}
 \text{a) Opérateurs covariants} & \left\{ \begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x} + \frac{\mathbf{i}}{2m} \beta \vec{\alpha} - \frac{\mathbf{i}}{2m E^2} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p} \\ \vec{S} &= \frac{1}{2 E^2} \{ m^2 \vec{\sigma} - \mathbf{i} m \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \vec{p} \} \end{aligned} \right. \\
 \text{et non observables} & \\
 \text{b) Opérateurs non covariants} & \left\{ \begin{aligned} \vec{q} &= \vec{x} + \frac{1}{2 E^2} (\vec{p} \wedge \vec{\sigma} + \mathbf{i} m \beta \vec{\alpha}) \\ \vec{\Sigma} &= \frac{1}{2 m} \{ m \vec{\sigma} - \mathbf{i} \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p}) \} \end{aligned} \right. \\
 \text{et non observables} & \\
 \text{c) Opérateurs non covariants} & \left\{ \begin{aligned} \vec{\tilde{q}} &= \vec{x} + \frac{1}{2 E} \mathbf{i} \beta \vec{\alpha} + \frac{\vec{p} \wedge \vec{\sigma}}{2 E (E + m)} - \frac{\mathbf{i} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{2 E^2 (E + m)} \\ \vec{\tilde{S}} &= \frac{1}{2 E} \left\{ m \vec{\sigma} - \mathbf{i} \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p}) + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \vec{p}}{E + m} \right\} \end{aligned} \right. \\
 \text{et observables} &
 \end{aligned}$$

Considérons alors les opérateurs de projection $\Lambda_{\pm}^D$, déjà définis sur l'espace des états à énergie positive et à énergie négative ; à tout opérateur A on peut alors faire correspondre deux opérateurs :

$$(I.30) \quad A_+ = \Lambda_+^D A \Lambda_+^D, \quad A_- = \Lambda_-^D A \Lambda_-^D,$$

opérant respectivement sur les états à énergies positive et négative ; ils seront donc des observables de l'électron et du positon.

On peut également définir « l'opérateur de projection A_P » de A par l'expression

$$(I.31) \quad A_P = A_+ + A_- = \frac{1}{2} \left(A + \frac{H}{E} A \frac{H}{E} \right).$$

2. *Opérateurs transformés dans la représentation de FW.* — La transformation de FW étant unitaire, la transformée d'un opérateur θ dans cette nouvelle représentation est donnée par

$$(I.32) \quad \theta' = U \theta U^{-1}.$$

TABLEAU II

Opérateur	Représentation de Dirac	Représentation NR de Pauli	Limites NR ($\rho_3 = \pm 1$)
Position	$\vec{x}$	$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{2 E (E + m)} - \frac{i \beta \vec{\alpha}}{2 E} + \frac{i \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{2 E^2 (E + m)}$	$\vec{x}_L' = \vec{x} - \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{2 E (E + m)}$
Moment	$\vec{p} = -i \vec{\nabla}$	$\vec{p}' = \vec{p}$	$\vec{p}_L' = \vec{p}$
Hamiltonien	$H = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$	$H' = \beta E$	$H_L' = \pm E$
Vitesse	$\vec{\alpha} = \frac{\vec{p}}{E}$	$\vec{\alpha}' = \vec{\alpha} + \frac{\beta \vec{p}}{E} - \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{E (E + m)}$	$\vec{\alpha}_L' = \pm \frac{\vec{p}}{E}$
?	$\beta = \rho_3$	$\beta' = \frac{m}{E} \beta - \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{E}$	$\beta_L' = + \frac{m}{E}$
Moment orbital	$\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$	$\vec{L}' = \vec{L} + \frac{p^2 \vec{\sigma}}{2 E (E + m)} - \frac{(p \cdot \vec{\sigma}) \vec{p}}{2 E (E + m)} + \frac{i \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})}{2 E}$	$\vec{L}_L' = \vec{L} + \frac{p^2 \vec{\sigma}}{2 E (E + m)} - \frac{(p \cdot \vec{\sigma}) \vec{p}}{2 E (E + m)}$
Moment de spin	$\vec{\sigma} = \frac{1}{2 i} (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha})$	$\vec{\sigma}' = \frac{m}{E} \vec{\sigma} + \frac{p \cdot \vec{\sigma}}{E (E + m)} + \frac{i \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})}{E}$	$\vec{\sigma}_L' = \frac{m}{E} \vec{\sigma} + \frac{p \cdot \vec{\sigma}}{E + m}$
Moment électrique	$\vec{v} = -i \beta \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$	$\vec{v}' = \frac{m}{E} \vec{v} - \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{E} - \frac{i \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{E (E + m)}$	$\vec{v}_L' = - \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{E}$
Moment magnétique	$\vec{\mu} = -\beta \vec{\sigma}$	$\vec{\mu}' = \vec{\mu} - \frac{p}{E} \gamma_5 + \frac{\beta p \cdot \vec{\sigma}}{E (E - m)}$	$\vec{\mu}_L' = \mp \vec{\sigma} \pm \frac{(p \cdot \vec{\sigma}) \vec{p}}{E (E - m)}$
?	$\gamma_5 = -\rho_1$ $= i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	$\gamma_5' = \frac{m}{E} \gamma_5 - \frac{\beta (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E}$	$\gamma_5'^L = \mp \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E}$
?	$\rho_2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta$ $i \gamma_5 \beta$	$\rho_2' = \rho_2$	$\rho_2'^L = 0$
Opérateurs de projection de Casimir	$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{H}{E} \right)$	$\Lambda_{\pm}' = \frac{1}{2} (1 \pm \beta)$	$\Lambda_{\pm}^L = \frac{1}{0}$

TABEAU III

Représentation de Dirac (cas NR)	Représentation de Pauli	Opérateurs moyens
$\vec{x} = x - \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{2 E (E + m)} + \frac{i \beta \vec{\alpha}}{2 E} - \frac{i \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{2 E^2 (E + m)}$	$\vec{x}' = x$	Position moyenne
$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} H}{E E}$	$\dot{\vec{x}}' = \frac{\vec{p}}{E} \beta$	Vitesse moyenne
$\vec{\Sigma} = \frac{m}{E} \vec{\sigma} + \frac{\vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{E (E + m)} - \frac{i \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})}{E}$	$\vec{\Sigma}' = \vec{\sigma}$	Spin moyen
$\Gamma_4 = \frac{H}{E}$	$\Gamma'_4 = \gamma_4 = \beta$	?
$\Gamma_5 = \frac{1}{E} \{ \beta (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + m \gamma_5 \}$	$\Gamma'_5 = \gamma_5$	?

Ainsi pour l'opérateur de position, nous obtenons

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{i \beta \vec{\alpha}}{2 E} - \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{2 E (E + m)} + \frac{i \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{2 E^2 (E + m)}.$$

On peut alors se demander quel est l'opérateur $\vec{x}$ dont la transformée est $\vec{x}'$? On trouve

$$\vec{x} = U^{-1} \vec{x}' U = \vec{x} + \frac{i \beta \vec{\alpha}}{2 E} - \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{2 E (E + m)} - \frac{i \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{2 E^2 (E + m)}.$$

Pour interpréter $\vec{x}$ il suffit de calculer sa dérivée temporelle :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = i [H, \vec{x}] = \frac{\vec{p} H}{E E}.$$

Or, l'opérateur H/E a pour valeurs propres ± 1 suivant qu'il est appliqué à ψ_+ ou ψ_- . Donc, $d\vec{x}/dt$ représente tout simplement la vitesse $\pm \vec{p}/E$ pour les états à énergie positive et $-\vec{p}/E$ pour les états à énergie négative. D'autre part, les composantes de $\vec{x}$ commutent entre elles, $\vec{x}$ sera appelé opérateur de « position moyenne ».

Nous calculons de même les transformées de l'opérateur spin $\vec{\sigma} = \frac{1}{2i} (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha})$. Nous constatons que « l'opérateur de spin moyen » $\vec{\Sigma}$ est une intégrale première. Rappelons que dans le cas de Dirac, c'est $L + \vec{\sigma}$ qui est intégrale première.

Les opérateurs $\tilde{q}$ et $\tilde{S}$ de Pryce sont respectivement identiques aux $\vec{x}$ et $\vec{\Sigma}$. Ce sont $\vec{x}$ et $\vec{\Sigma}$ qui doivent être considérés comme des opérateurs de position et de spin dans la théorie de Dirac.

TABLEAU IV

Opérateurs	Représentation de Dirac	Représentation ER de Weyl	Limites ER ($\rho_1 = \pm 1$)
Position	$\vec{x}$	$\vec{x} = \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{2 p^2 E (E + p)} + \frac{i m \beta \alpha}{2 p E} - \frac{i m (E + p)}{2 p^3 E^2} \beta (\alpha, p) p$	$\vec{x}_L = \frac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{2 p^2 E (E + p)}$
Moment	$\vec{p} = -i \vec{\nabla}$	$\vec{p} = p$	$\vec{p}_L = p$
Hamiltonien	$H = \beta m + \alpha, p$	$H' = \left(\frac{\alpha, p}{p} \right) E$	$H'_L = \pm \left(\frac{\vec{\sigma}, p}{p} \right) E$
Vitesse	$\vec{\alpha} = \vec{x}$	$\vec{\alpha} = \frac{m \beta p}{p E} - \frac{m^2 (\alpha, p) p}{p^2 E (E + p)}$	$\vec{\alpha}_L = \pm \frac{m^2 p}{p E (E + p)} \left(\frac{\vec{\sigma}, p}{p} \right)$
?	$\beta = \rho_3$	$\beta' = \frac{p}{E} \beta + \frac{m (\alpha, p)}{p E}$	$\beta'_L = \pm \frac{m}{E} \left(\frac{\vec{\sigma}, p}{p} \right)$
Moment orbital	$\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$	$\vec{L} = \frac{m^2 \sigma}{2 E (E + p)} - \frac{m^2 (p, \sigma) p}{2 p^2 E (E + p)} + \frac{i m \beta (\alpha \wedge p)}{2 p E}$	$\vec{L}_L = \frac{m^2 \sigma}{2 E (E + p)} - \frac{m^2 p}{2 p E (E + p)} \left(\frac{\vec{\sigma}, p}{p} \right)$

Moment de spin	$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \vec{1} (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha})$	$\vec{\sigma} = \frac{p}{E} \vec{\sigma} + \frac{m}{p^2 E (E + p)} \vec{1} m \vec{\beta} (\vec{\alpha} \wedge p)$	$\vec{\sigma}_L = \frac{p}{E} \vec{\sigma} + \frac{m}{p E (E + p)} \vec{1} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot p}{p} \right)$
Moment électrique	$\vec{v} = -i \vec{\beta} \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$	$\vec{v} = \frac{p}{E} \vec{v} + \frac{m}{p E} \vec{1} m^2 \vec{\beta} (\vec{\alpha} \wedge p)$	$\vec{v}_L = \frac{m (\vec{\sigma} \wedge p)}{p E}$
Moment magnétique	$\vec{\mu} = -\vec{\beta} \vec{\sigma}$	$\vec{\mu} = \frac{p}{E} \vec{\mu} + \frac{m}{p E} p \vec{\gamma}_5 + \frac{m^2}{p^2 E (E + m)} \vec{1} m^2 \vec{\beta} (p, \vec{\sigma}) p$	$\vec{\mu}_L = \frac{m}{p E} \vec{1} m \vec{p}$
?	$\gamma_5 = -\rho_1 = i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	$\gamma'_5 = \frac{p}{E} \gamma_5 + \frac{m}{p E} \vec{1} \vec{\beta} (p, \vec{\sigma})$	$\gamma'^L_5 = \frac{p}{E}$
?	$\rho_2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta = -i \gamma_5 \beta$	$\rho'_2 = \rho_2$	$\rho'^L_2 = 0$
Opérateurs de projection de Casimir	$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{H}{E} \right)$	$\Lambda'_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\vec{\alpha} \cdot p}{p} \right)$	$\Lambda'^L_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\vec{\sigma} \cdot p}{p} \right)$

Nous faisons ainsi un calcul systématique pour les principaux opérateurs dynamiques de la théorie de Dirac et nous résumons les résultats dans les tableaux II et III. Nous y figurons également, devant chaque opérateur transformé, ce que nous appelons « les limites d'opérateur » (NR) ou « opérateurs classiques » obtenus en posant $\rho_3 = \pm 1$ et en négligeant les matrices impaires.

3. *Définition d'une nouvelle représentation et opérateurs transformés correspondants.* — Nous venons de voir qu'à l'approximation non relativiste (NR, $p \rightarrow 0$), la transformation de FW établit une correspondance entre la théorie de Dirac et celle de Pauli. Nous pouvons alors nous demander quelle est, à l'approximation extrême-relativiste (ER, $p \rightarrow c$), la transformation qui établit une correspondance entre la théorie de Dirac et celle de Weyl, celle-ci décrivant le neutrino ?

Cette transformation unitaire fut trouvée par M. Cini & B. Toushek en 1958 [12] et aussi par S. K. Bose, A. Gamba & E. C. G. Sudarshan en 1959 [10] ; elle s'écrit

$$(I.33) \quad \mathbf{e}^{iV} = \left\{ E + p - \frac{m}{p} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \right\} / \sqrt{2 E (E + p)}.$$

Appliquant cette transformation à l'hamiltonien de Dirac, nous obtenons

$$H' = \mathbf{e}^{iV} H \mathbf{e}^{-iV} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} E = \rho_1 \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p} \right) E.$$

On élimine donc ainsi, dans cette nouvelle représentation, les matrices paires de l'hamiltonien de Dirac.

L'équation de Dirac sera donc découpée suivant les deux états de chiralité $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})/p = \pm 1$. En effet, l'équation de Dirac $\mathbf{i} \partial \psi / \partial t = H' \psi$ devient

$$(I.34) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi' = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p} \right) E \varphi', \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \chi' = - \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p} \right) E \chi',$$

où $\psi' = \varphi' + \chi'$ avec $\varphi' = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi'$, $\chi' = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi'$.

Nous utilisons ici la représentation extrême-relativiste (I.13 b).

Nous définissons également les « opérateurs moyens » par $\mathbf{e}^{-iV} \theta \mathbf{e}^{iV}$. Les résultats du calcul pour les principaux opérateurs dynamiques de la théorie de Dirac sont résumés dans les tableaux IV et V. Nous y figurerons également, devant chaque opérateur transformé, ce que nous appelons les « limites d'opérateur » (ER) qui s'obtiennent en posant $\rho_1 = \pm 1$ et en éliminant les matrices impaires.

Comme indiqué dans le tableau IV, nous avons également calculé les opérateurs de projection $\Lambda_{\pm}^E$ dans la nouvelle représentation

$$\Lambda_{\pm}^E = \mathbf{e}^{iV} \Lambda_{\pm}^D \mathbf{e}^{-iV} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \right)$$

et nous définissons, pour tout opérateur A, deux opérateurs

$$(I.35) \quad A_+ = \Lambda_+^E A \Lambda_+^E, \quad A_- = \Lambda_-^E A \Lambda_-^E$$

opérant respectivement sur les états à énergie positive et énergie négative.

TABEAU V

Opérateurs moyens	Réprésentation de Dirac (cas ER)	Réprésentation de Weyl
Position moyenne	$\begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{N} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix}$
Vitesse moyenne	$\begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix}$
Spin moyen	$\begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vec{\sigma} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{\sigma} \wedge \vec{p} \\ 2 p^2 E (E + p) \end{matrix}$
?	$\Gamma_4 = \frac{1}{E} \{ p \beta - m (\alpha \wedge p) \}$	$\Gamma'_4 = \gamma_4 = \beta$
?	$\Gamma_5 = - \frac{H}{E} \left(\frac{\sigma \cdot p}{p} \right)$	$\Gamma'_5 = \gamma_5$

En utilisant (I.35), suivant Bose, Gamba & Sudarshan, nous trouvons le tableau VI.

TABLEAU VI

Position	$\vec{x}_{\pm} = \left\{ \vec{x} \pm \frac{1}{2i p} \left(\vec{\alpha} - \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{p^2} \right) \right\} \Lambda_{\pm}^E$
Moment orbital	$\vec{L}_{\pm} = \left\{ \vec{x} \pm \frac{1}{2i p} \vec{\alpha} \right\} \wedge \vec{p}_{\pm}$
Moment de spin	$\vec{\sigma}_{\pm} = \mp \gamma_5 \frac{\vec{p}_{\pm}}{p}$

Il est intéressant de noter d'une part, que les composantes de $\vec{x}$ ne commutent pas dans cette représentation et d'autre part, que les moments cinétiques orbital et de spin sont séparément des intégrales premières.

Remarquons enfin qu'il existe une autre transformation unitaire déduite des transformations de FW et de CT par

$$\mathbf{e}^{iS} \mathbf{e}^{-iV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \right)$$

qui permet d'obtenir un hamiltonien transformé $H' = \beta \vec{p}$. Cette transformation semble être particulièrement utile dans la théorie des particules de masse nulle.

4. *Comparaison aux opérateurs de position de Pac et Mathews & Sankaranarayanan.* — A) OPÉRATEUR DE POSITION DE PAC [25]. — Comme nous l'avons fait plus haut, Pac calcule d'une part, l'opérateur de position transformé $\vec{x}'$ dans la représentation ER par $\vec{x}' = U \vec{x} U^{-1}$ et d'autre part, l'opérateur de position moyenne dans la représentation de Dirac par $\vec{x} = U^{-1} \vec{x}' U$.

Se plaçant ensuite dans un point de vue inverse, il postule que $\vec{x}$ représente l'opérateur de position dans la représentation de Dirac, ce qui lui permet de dire que $\vec{x}$ représente l'opérateur de position moyenne dans la représentation ER. Il « adopte » alors pour x la forme suivante :

$$(I.36) \quad \vec{x}_E = \vec{x} - \frac{1}{2p^2} (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}).$$

Il nous sera cependant facile de voir que (I.36) n'est autre que la projection de l'opérateur de position défini par Pryce :

$$(I.37) \quad \vec{x}_P = \vec{x}_+ + \vec{x}_-$$

avec $\vec{x}_+ = \Lambda_+^E \vec{x} \Lambda_+^E$, $\vec{x}_- = \Lambda_-^E \vec{x} \Lambda_-^E$.

En effet, en remplaçant $\Lambda_{\pm}^E$ par leurs expressions, nous obtenons

$$(I.38) \quad \vec{x}_P = \frac{1}{2} \left\{ \vec{x} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \vec{x} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \right\} = \vec{x} - \frac{1}{2p^2} \mathbf{r}(\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) = \vec{x}_E.$$

La définition d'un opérateur de position par (I.36) ou (I.38) présente l'avantage de ne pas contenir des termes mélangeant les états à énergies positive et négative.

B) OPÉRATEUR DE POSITION DE MATHEWS & SANKARANARAYANAN [24]. — Ces auteurs définissent dans la représentation de FW un opérateur de position $\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}$, où $\vec{\xi} = A (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) + B (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) \beta$, A et B étant des fonctions de p et m . L'opérateur de position moyenne dans la représentation de Dirac est alors

$$(I.39) \quad \vec{x} = \vec{x} + \frac{\mathbf{i} \beta \vec{\alpha}}{2 E} - \frac{\mathbf{i} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p} + (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) E}{2 E^2 (E + m)} + \\ + \frac{A}{E} \{ m (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) + \mathbf{i} \beta \vec{\alpha} p^2 - \mathbf{i} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p} \} + B (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) \beta.$$

L'introduction de $\vec{\xi}$ a donc conduit aux deux derniers termes supplémentaires dans (I.39). L'analyse de (I.39) montre que :

a) $\vec{x}$ devient une observable (au sens de Pryce) pour les quatre cas suivants :

- (1) $A = B = 0$, (2) $A = -1/p^2$, $B = 0$,
 (3) $A = -1/2 p^2$, $B = -1/2 p^2$, (4) $A = -1/2 p^2$, $B = +1/2 p^2$;

le cas (1) correspond à celui de FW (cf. tableau II) ;

b) $\vec{x}$ devient l'opérateur covariant de Pryce (cf. tableau I) pour

$$A = (E - m)/2 m p^2, \quad B = 0;$$

c) $\vec{x}$ devient l'opérateur non covariant de Pryce (cf. tableau I) pour

$$A = - (E - m)/2 E p^2, \quad B = 0;$$

d) $\vec{x}$ devient l'opérateur de projection (I.36) pour $A = -1/2 p^2$, $B = 0$.

Malgré l'élégance de la méthode qui montre surtout la non-unicité de la définition d'un opérateur de position, l'expression (I.39) ne semble apporter rien de nouveau quant à son interprétation physique. Il ne semble pas exister, en effet, des valeurs de A et B pour lesquelles (I.39) devient un opérateur à la fois covariant et observable.

5. Transformation de Cayley. — Les deux transformations de FW et CT établissant ainsi une liaison entre la théorie relativiste de Dirac d'une part et les deux autres théories NR et ER d'autre part, il nous [8] a paru intéressant d'expliciter leur dépendance l'une vis-à-vis de l'autre et de les obtenir comme cas particuliers d'une même transformation T déduite de la transformation de Cayley $U = (\Lambda - \mathbf{i} I) (\Lambda + \mathbf{i} I)^{-1}$ en y choisissant une forme de Λ adaptée au problème.

En appliquant ensuite cette transformation T aux différents opérateurs de la théorie de Dirac, nous montrons que l'on retrouve pour les deux cas particuliers NR et ER les résultats établis précédemment. Nous montrons enfin que l'on peut déduire de U la transformation d'Eriksen [16].

A) DÉFINITION DE LA TRANSFORMATION DE CAYLEY ET SON ÉQUIVALENCE AUX TRANSFORMATIONS DE FW ET CT. — Etant donnée une transformation autoadjointe Λ , on en déduit sa transformée cayleyenne par l'expression

$$(I.40) \quad U = (\Lambda - \mathbf{i} I) (\Lambda + \mathbf{i} I)^{-1},$$

où U est unitaire.

En prenant pour Λ un opérateur hermitien $\Lambda = \mathbf{i} \varepsilon \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$, où ε est un scalaire, nous déduisons de (I.40)

$$(I.41) \quad T = (\Lambda - \mathbf{i} \mathbf{I}) (\Lambda + \mathbf{i} \mathbf{I})^{-1} = \frac{\varepsilon^2 p^2 - 1 + 2 \varepsilon \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\varepsilon^2 p^2 + 1}.$$

Nous déterminons ε en postulant que l'hamiltonien transformé H' d'un électron libre est débarrassé des matrices soit paires soit impaires :

$$(I.42) \quad H' = F(\varepsilon) \beta + G(\varepsilon) \vec{\alpha} \cdot \vec{p},$$

où

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} (\varepsilon^4 p^4 - 4 \varepsilon^2 p^2 m - 6 \varepsilon^2 p^2 + 4 \varepsilon m + 1),$$

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} (\varepsilon^4 m p^4 + 4 \varepsilon^3 p^4 - 6 \varepsilon^2 m p^2 - 4 \varepsilon p^2 + m).$$

a) En annulant le coefficient $G(\varepsilon)$ de $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ nous obtenons une valeur $\varepsilon = \varepsilon_{NR} = [E + m + \sqrt{2 E (E + m)}] / p^2$ telle qu'en portant cette valeur dans (I.41) nous obtenons

$$(I.43) \quad T = T_{NR} = (E + m + \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) / \sqrt{2 E (E + m)}, \quad H' = \beta E.$$

b) De même, en annulant le coefficient $F(\varepsilon)$ de β , nous obtenons une valeur $\varepsilon = \varepsilon_{ER} = -[E + p + \sqrt{2 E (E + p)}] / m p$, telle qu'en portant cette valeur dans (I.41) nous obtenons

$$(I.44) \quad T = T_{ER} = \left(E + p - \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} m \right) / \sqrt{2 E (E + p)}, \quad H' = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} E.$$

Pour les trois autres valeurs de ε dans chacun des deux cas précédents, nous obtenons :

$$T_{NR}^{(1)}(E) = -T_{NR}^{(2)}(E) = T_{NR}^{(3)}(-E) = -T_{NR}^{(4)}(-E),$$

$$T_{ER}^{(1)}(E) = -T_{ER}^{(2)}(E) = T_{ER}^{(3)}(-E) = -T_{ER}^{(4)}(-E).$$

Il est quelquefois plus commode d'écrire (I.41) sous forme exponentielle. Ainsi,

$$T = e^{iR}, \quad \text{avec} \quad R = -\mathbf{i} \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \arctg \frac{2 \varepsilon p}{\varepsilon^2 p^2 - 1}.$$

Pour les deux valeurs particulières de ε nous déduisons de (I.43) et (I.44) les expressions suivantes :

$$(I.45a) \quad \{ e^{iR} \}_{NR} = \exp \left(\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \arctg \frac{p}{E + m} \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \arctg \frac{p}{m} \right),$$

$$(I.45b) \quad \{ e^{iR} \}_{ER} = \exp \left[\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \arctg \left(-\frac{m}{E + p} \right) \right]$$

$$= \exp \left(-\frac{1}{2} \beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \arctg \frac{p}{m} \right).$$

Ces deux dernières expressions ne sont autres que les transformations de FW et CT sous formes exponentielles.

MÉCANIQUE RELATIVISTE DES PARTICULES A SPIN

TABLEAU VII

Opérateurs	Représentation de Dirac	Représentation transformée de Cayley
Position	$\vec{x}$	$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{4\epsilon^2}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) - \frac{2i\epsilon(\epsilon^2 p^2 - 1)}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta \vec{\alpha} +$ $+ \frac{2i\{\epsilon' + p\epsilon^2(2\epsilon + p\epsilon')\}}{p(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p} \quad \left\{ \epsilon' = \frac{d\epsilon}{dp} \right\}$
Moment	$\vec{p} = -i \vec{\nabla}$	$\vec{p}' = \vec{p}$
Hamiltonien	$H = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$	$H' = F(\epsilon) \beta + G(\epsilon) \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$
Vitesse	$\vec{\alpha} = \frac{\vec{p}}{x}$	$\vec{\alpha}' = \vec{\alpha} + \frac{4(\epsilon^2 p^2 - 1)\epsilon}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \vec{p} - \frac{8\epsilon^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2}$
?	$\beta = p_3$	$\beta' = \frac{(\epsilon^2 p^2 - 1)^2 - 4\epsilon^2 p^2}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta - \frac{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2}{4\epsilon(\epsilon^2 p^2 - 1)} (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$
Moment orbital	$\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$	$\vec{L}' = \vec{L} + \frac{4\epsilon^2 p^2}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \vec{\sigma} - \frac{4\epsilon^2 (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \vec{p}}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} -$ $- \frac{2i\epsilon(\epsilon^2 p^2 - 1)}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})$
Moment de spin	$\vec{\sigma} = \frac{1}{2i} (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha})$	$\vec{\sigma}' = \frac{(\epsilon^2 p^2 - 1)^2 - 4\epsilon^2 p^2}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \vec{\sigma} + \frac{8\epsilon^2 \vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} +$ $+ \frac{4i\epsilon(\epsilon^2 p^2 - 1)}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})$
Moment électrique	$\vec{v} = -i \beta \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$	$\vec{v}' = \frac{(\epsilon^2 p^2 - 1)^2 - 4\epsilon^2 p^2}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \vec{v} - \frac{4\epsilon(\epsilon^2 p^2 - 1)}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) +$ $+ \frac{8i\epsilon^2}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \vec{p}$
Moment magnétique	$\vec{\mu} = -\beta \vec{\sigma}$	$\vec{\mu}' = \vec{\mu} + \frac{4\epsilon(\epsilon^2 p^2 - 1)}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \vec{p} \gamma_5 + \frac{8\epsilon^2 \beta (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \vec{p}}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2}$
?	$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ $= i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$	$\gamma_5' = \frac{(\epsilon^2 p^2 - 1)^2 - 4\epsilon^2 p^2}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \gamma_5 - \frac{4\epsilon(\epsilon^2 p^2 - 1)}{(\epsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})$
?	$\rho_2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta$ $= -i \gamma_5 \beta$	$\rho_2' = \rho_2$
Opérateurs de projection de Casimir	$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{H}{E} \right)$	$\Lambda_{\pm}' = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{H'}{E} \right)$

B) APPLICATION AUX DIFFÉRENTS OPÉRATEURS DE DIRAC. — Nous appliquons la transformation (I.41) aux opérateurs de la théorie de Dirac pour obtenir les opérateurs transformés et les opérateurs moyens. Les résultats sont indiqués aux tableaux VII et VIII. Pour $\varepsilon = \varepsilon_{NR}$ nous obtenons les tableaux II et III. Pour $\varepsilon = \varepsilon_{ER}$ nous obtenons les tableaux IV et V.

TABLEAU VIII

Opérateurs moyens	Représentation de Cayley
Position moyenne	$\vec{x} = \vec{x} - \frac{4\varepsilon^2}{\varepsilon^2 p^2 + 1} (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}) + \frac{2\mathbf{i}\varepsilon(\varepsilon^2 p^2 - 1)}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta \vec{\alpha} -$ $- \frac{2\mathbf{i}\{\varepsilon' + p\varepsilon^2(2\varepsilon + p\varepsilon')\}}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$
Vitesse moyenne	$\dot{\vec{x}} = -\mathbf{i} \exp[-\mathbf{i} R] \left\{ \frac{d}{dp} H' \right\} \exp[\mathbf{i} R]$
Spin moyen	$\vec{\Sigma} = \frac{(\varepsilon^2 p^2 - 1)^2 - 4\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \vec{\sigma} + \frac{8\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) -$ $- \frac{4\mathbf{i}\varepsilon(\varepsilon^2 p^2 - 1)}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})$
?	$\Gamma_4 = \frac{(\varepsilon^2 p^2 - 1)^2 - 4\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta + \frac{4\varepsilon(\varepsilon^2 p^2 - 1)}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$
?	$\Gamma_5 = \frac{(\varepsilon^2 p^2 - 1)^2 - 4\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \gamma_5 + \frac{4\varepsilon(\varepsilon^2 p^2 - 1)}{(\varepsilon^2 p^2 + 1)^2} \beta (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$

C) DÉDUCTION DE LA TRANSFORMATION D'ERIKSEN A PARTIR DE (I.40). — Considérons (I.40) et prenons pour Λ l'expression $\Lambda' = u(2f\lambda - a)$, où f et λ sont deux opérateurs hermitiens, $f = f^+$, $\lambda = H/(H^2)^{1/2} = \lambda^+$, $a = f\lambda + \lambda f$, $u = [-\mathbf{i}(a + 2) - 2\mathbf{i}\sqrt{a + 2}]/(a^2 - 4)$. Alors (I.41) se transforme aisément en

$$T' = \frac{u^2(a^2 - 4) - 1 - 2\mathbf{i}u(2f\lambda - a)}{u^2(a^2 - 4) + 1} = \frac{f\lambda + 1}{\sqrt{a + 2}}.$$

Cette dernière expression n'est autre que la transformation d'Eriksen [16]. Rappelons que cette analogie n'est pas générale mais ne correspond qu'aux cas particuliers considérés.

Nous remarquons finalement que nous pouvons aussi mettre l'expression (I.45a) sous la forme

$$\{e^{iR}\}_{NR} = \exp\left(\frac{1}{2}\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \arctg \frac{p}{m}\right) = \exp\left[\arctg \left(\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \frac{p}{E+m}\right)\right] = L^{-1},$$

où L est la transformation de Lorentz écrite sous cette forme par Giambiagi [21].

5. Conclusion. — L'étude précédente permet une meilleure compréhension de la théorie de Dirac à l'approximation classique. Nous avons en effet montré que l'interprétation physique des opérateurs dynamiques de la théorie de Dirac n'est possible que si on passe dans une représentation unitaire du genre de FW. Quand la particule de Dirac est soumise à un champ électromagnétique, nous avons pu établir une formule générale de l'hamiltonien débarrassé de ses matrices impaires à l'approximation $(1/m)^4$. Cette formule nous a permis d'étudier en particulier le cas où la particule est douée d'un moment magnétique anomal : nous avons en effet montré que dans ce cas le moment magnétique anomal introduit une correction dans les couplages spin-champ magnétique et spin-orbite.

Nous avons ensuite étudié la limite extrême-relativiste de la théorie de Dirac pour obtenir la théorie de Weyl, celle-ci décrivant le neutrino. Nous avons montré finalement que les deux transformations, qui ont permis d'étudier les limites non relativiste et extrême-relativiste, peuvent être obtenues d'une façon générale par la transformation de Cayley.

Nous sommes maintenant conduit à appliquer une méthode analogue pour les cas des particules de spin 0, 1 ou quelconque et d'en étudier l'interprétation physique ; c'est ce que nous faisons dans les deux chapitres suivants.

II. PARTICULES DE SPIN 0 OU 1 :

l'interprétation physique des opérateurs de la théorie de la fusion de L. de Broglie et la limite non relativiste de la théorie restreinte de Petiau

1. Introduction. — Les particules de spin 0 ou 1 sont décrites soit par le formalisme de Louis de Broglie [2] utilisant une fonction d'onde à 16 composantes, soit par le formalisme de Petiau-Duffin-Kemmer [38] utilisant une fonction d'onde à 10 composantes. Ces deux formalismes sont réductibles et c'est ainsi que Petiau [38], en éliminant les fonctions d'onde non évolutives de la théorie de L. de Broglie, en donne un système irréductible de 6 équations pour les particules de spin 1 et un système de 2 équations pour les particules de spin 0.

Partant d'autre part du deuxième formalisme, Sakata & Taketani [39], Heitler [35] sont également arrivés au même résultat que Petiau.

Nous allons donc dans ce chapitre rappeler assez brièvement ces deux formalismes et montrer que :

a) la théorie de la fusion de L. de Broglie permet, en considérant les fonctions d'onde évolutives et en introduisant une transformation unitaire du type de FW, l'interprétation physique des principaux opérateurs dynamiques de la théorie :

b) la théorie restreinte de Petiau, mise sous forme hamiltonienne, permet une étude non relativiste. Nous montrons, en effet, que la limite non relativiste de ce formalisme s'effectue en passant dans une autre représentation par une transformation unitaire. Nous établissons également dans cette nouvelle représentation les équations d'ondes générales de la particule soumise à un champ électromagnétique. En considérant ensuite séparément les champs faibles électriques ou magnétiques, nous résolvons par approximations ces équations.

Nous remarquons que Feshbach & Villars ont récemment obtenu quelques-uns de nos résultats pour les particules de spin 0.

2. Théorie de la fusion de L. de Broglie et interprétation physique des opérateurs dynamiques. — Louis de Broglie a développé une théorie de la particule de spin maximum 1 [2], particule pouvant avoir le spin 0 ou 1, en considérant la fusion de deux particules de spin 1/2 dont les spins peuvent se composer. Le développement de cette théorie exige l'introduction d'une fonction d'onde ψ à 16 composantes que nous écrivons $\psi_{\sigma\tau}$, les indices σ et τ pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4.

1. Solution générale du système d'équations de la particule de spin maximum 1. — Les 32 équations fondamentales de la particule de spin maximum 1 sont :

$$(II.1) \quad \{p_0 A_0 + \vec{p} \cdot \vec{A} + m A_4\} \psi_{\sigma\tau} = 0, \quad \{p_0 B_0 + \vec{p} \cdot \vec{B}\} \psi_{\sigma\tau} = 0$$

[on peut obtenir la première équation (II.1) en lui appliquant à gauche l'opérateur de la deuxième], où

$$(II.2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{2} \{ \alpha_0^{(1)} \otimes \beta^{(2)} + \alpha_0^{(2)} \otimes \beta^{(1)} \}, \\ \vec{A} = \frac{1}{2} \{ \vec{\alpha}^{(1)} \otimes \beta^{(2)} + \vec{\alpha}^{(2)} \otimes \beta^{(1)} \}, \end{array} \right. \quad A_4 = \beta^{(1)} \otimes \beta^{(2)},$$

$$(II.2b) \quad B_0 = \frac{1}{2} \{ \alpha_0^{(1)} \otimes \beta^{(2)} - \alpha_0^{(2)} \otimes \beta^{(1)} \}, \quad \vec{B} = \frac{1}{2} \{ \vec{\alpha}^{(1)} \otimes \beta^{(2)} - \vec{\alpha}^{(2)} \otimes \beta^{(1)} \}.$$

Réolvons le système (II.1) dans le cas des ondes planes :

$$(II.3) \quad \psi(\vec{x}, t) = \psi_-(\vec{x}) e^{-iWt} + \psi_+(\vec{x}) e^{+iWt}, \quad \text{avec } W = +\sqrt{p^2 + m^2}.$$

Nous tirons d'autre part de (II.1) l'équation suivante :

$$\{ \vec{p} \cdot \vec{B}' + m B_0 \} \psi_{\sigma\tau}(\vec{x}, t) = 0, \quad \text{où } \vec{B}' = \frac{1}{2} \{ \alpha_0^{(1)} \otimes \vec{\alpha}^{(2)} - \alpha_0^{(2)} \otimes \vec{\alpha}^{(1)} \}.$$

A l'instant initial, cette équation est équivalente à

$$(II.4) \quad \{ h^{(2)}(\vec{p}) - h^{(1)}(\vec{p}) \} \psi(\vec{x}) = 0,$$

avec

$$h^{(i)}(\vec{p}) = (\vec{p} \cdot \vec{\alpha})^{(i)} + m \beta^{(i)} \quad (i = 1, 2).$$

Les fonctions ψ_+ et ψ_- satisfont alors aux deux systèmes suivants :

$$(II.5a) \quad \{ W A_0 + \vec{p} \cdot \vec{A} + m A_4 \} \psi_-(\vec{x}) = 0, \quad \{ W B_0 + \vec{p} \cdot \vec{B} \} \psi_-(\vec{x}) = 0,$$

$$(II.5b) \quad \{ -W A_0 + \vec{p} \cdot \vec{A} + m A_4 \} \psi_+(\vec{x}) = 0, \quad \{ -W B_0 + \vec{p} \cdot \vec{B} \} \psi_+(\vec{x}) = 0.$$

En résolvant ces équations nous obtenons finalement

$$(II.6) \quad \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4 \sqrt{11}^2} \{ (W - h^{(1)}) (W - h^{(2)}) \psi(\vec{x}) e^{-iWt} + \\ + (W + h^{(1)}) (W + h^{(2)}) \psi(\vec{x}) e^{+iWt} \}.$$

2. *Passage à une nouvelle représentation analogue à celle de FW.* — Le passage à une représentation s'effectue en appliquant une transformation unitaire T sur la fonction d'onde précédente :

$$(II.7) \quad \psi'(\vec{x}, t) = T(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t),$$

avec

$$(II.8) \quad \psi'_+ = \frac{1}{2} (1 + A_0) \psi'_+ = T \psi_+, \quad \psi'_- = \frac{1}{2} (1 - A_0) \psi'_- = T \psi_-;$$

ψ'_+ correspond ainsi à la valeur propre $+1$ de A_0 et ψ'_- correspond à la valeur propre -1 de A_0 .

En multipliant (II.8) à gauche par A_0^2 , nous obtenons

$$(II.9) \quad A_0^2 \psi'_+ = \frac{1}{2} (A_0^2 + A_0) \psi'_+, \quad A_0^2 \psi'_- = \frac{1}{2} (A_0^2 - A_0) \psi'_-,$$

puis

$$(II.10) \quad \begin{cases} (1 + \beta^{(1)}) (1 + \beta^{(2)}) T (W - h^{(1)}) (W - h^{(2)}) \psi(\vec{x}) = 0, \\ (1 - \beta^{(1)}) (1 - \beta^{(2)}) T (W + h^{(1)}) (W + h^{(2)}) \psi(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Si

$$(II.11) \quad T = T^{(1)} \otimes T^{(2)},$$

(II.10) donne

$$(II.12) \quad \begin{aligned} (1 + \beta^{(i)}) T^{(i)} (W - h^{(i)}) &= 0, \\ (1 - \beta^{(i)}) T^{(i)} (W + h^{(i)}) &= 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Les systèmes (II.12) sont précisément ceux qui définissent la transformation de FW $T^{(1)}$ (ou $T^{(2)}$) correspondant à la particule de spin $1/2$:

$$(II.13) \quad T^{(i)} = \lambda(\vec{p}) (W + \beta h)^{(i)} \quad (i = 1, 2),$$

où $\lambda(\vec{p})$ est une constante de normalisation. On a donc finalement

$$(II.14) \quad T = T^{(1)} \otimes T^{(2)} = \lambda^2(\vec{p}) (W + \beta h)^{(1)} \otimes (W + \beta h)^{(2)}.$$

Nous voyons donc que le passage à une nouvelle représentation s'effectue à l'aide d'une transformation T , produit tensoriel de deux transformations du type de FW.

Pour calculer la constante λ^2 nous allons écrire que la densité de probabilité de présence ρ reste inchangée par T . Nous obtenons ainsi finalement,

$$(II.15) \quad T = \frac{1}{2(W + m) \sqrt{Wm}} (W + \beta h)^{(1)} \otimes (W + \beta h)^{(2)}.$$

3. *Opérateurs transformés dans la nouvelle représentation.* — Si A est un opérateur, sa transformée est définie par

$$(II.16) \quad A' = T A T^{-1}.$$

Avec les mêmes définitions des matrices paires et impaires que dans le premier chapitre, nous éliminerons dans l'expression de A' les matrices impaires et nous poserons $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = 1$. La quantité ainsi obtenue sera appelée limite non relativiste, partie classique ou partie à énergie positive de A .

Considérons alors l'hamiltonien de la particule $H = \frac{1}{2} (h^{(1)} + h^{(2)})$ ou $H = \frac{1}{2} (h^{(1)} \otimes \beta^{(2)} + \beta^{(1)} \otimes h^{(2)})$; la partie à énergie positive de H sera (dans les deux cas) $H'_+ = W$. Ainsi, dans cette nouvelle représentation, nous avons $i \partial \psi' / \partial t = H' \psi'$ ou

$$(II.17) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \psi'_+ = W \psi'_+, \quad i \frac{\partial}{\partial t} \psi'_- = -W \psi'_-.$$

Un calcul permet d'établir, pour les principaux opérateurs de la théorie des particules de spin 0 ou 1, le tableau IX.

TABLEAU IX

Opérateurs	Représentation de L. de Broglie	Limites NR
Position	$\vec{x}$	$\vec{x}_+ = \vec{x} - \frac{W - m}{2 m W (W + m)} (\vec{p} \wedge \vec{\sigma})$
Moment	$\vec{p} = -i \vec{\nabla}$	—
Hamiltonien	$H = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (h^{(1)} \otimes \beta^{(2)} + h^{(2)} \otimes \beta^{(1)}) \\ \frac{1}{2} (h^{(1)} + h^{(2)}) \end{array} \right\}$	$H'_+ = W$
Vitesse	$\vec{\alpha} = \frac{1}{2} (\vec{\alpha}^{(1)} + \vec{\alpha}^{(2)})$	$\vec{\alpha}_+ = \vec{p} / W$
Moment orbital	$\vec{L} = (\vec{x} \wedge \vec{p})$	$\vec{L}_+ = \vec{L} - \frac{\{ \vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) - p^2 \vec{\sigma} \} (W - m)}{2 m W (W + m)}$
Moment de spin	$\vec{\sigma} = \frac{1}{4 i} \{ (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha})^{(1)} + (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha})^{(2)} \}$	$\vec{\sigma}_+ = \frac{m \vec{\sigma}}{W} + \frac{\vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{W (W + m)}$
Moment électrique	$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ (i \vec{\alpha} \beta)^{(1)} + (i \vec{\alpha} \beta)^{(2)} \}$	$\vec{\varepsilon}_+ = (\vec{p} \wedge \vec{\sigma}) / W$
Moment magnétique	$\vec{\mu} = \frac{i}{4} \left\{ (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha}) \beta^{(1)} + (\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha}) \beta^{(2)} \right\}$	$\vec{\mu}_+ = \vec{\sigma} - \frac{\vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}{W (W + m)}$
Energie-impulsion	$\left\{ \begin{array}{l} \text{non symétrique } T_{\mu\nu} \\ \text{symétrique } M_{\mu\nu} \end{array} \right.$	$\begin{aligned} (T'_{mn})_+ &= (M'_{mn})_+ = p_m p_n / W \\ (T'_{m4})_+ &= (T'_{4m})_+ = (M'_{m4})_+ \\ &= -i p_m \\ (T'_{44})_+ &= (M'_{44})_+ = -W \end{aligned}$

3. **La théorie restreinte de Petiau et son approximation non relativiste** — Le système (II.1) montre que sur les 16 équations aux dérivées partielles, il n'y en a que 8 qui font apparaître explicitement les dérivées temporelles et ceci quelles que soient les représentations adoptées pour les matrices $\alpha_\mu^{(i)}$ ($i = 1, 2$). G. Petiau [38] en profite pour séparer la fonction d'onde à 16 composantes de (II.1) en deux groupes :

a) les fonctions d'onde directement évolutives au nombre de 8 ; elles ne sont pas nulles dans le système propre ;

b) les fonctions d'onde non directement évolutives également au nombre de 8.

En éliminant les fonctions d'onde évolutives, Petiau arrive à un système de 8 équations d'ondes et il décompose celui-ci en deux systèmes irréductibles, l'un formé de 6 équations correspondant aux particules de spin 1 et l'autre de 2 équations correspondant aux particules de spin 0. Nous allons écrire ces systèmes sous forme hamiltonienne.

En effet, le système de 6 équations correspondant aux particules de spin 1 s'écrit

$$(II.18) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi ,$$

avec

$$H = \Pi^2 (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) + \frac{e}{2m} (\vec{S} \cdot \vec{\mathcal{H}}) (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) - \frac{1}{m} (\vec{S} \cdot \vec{\Pi})^2 \mathbf{i} \rho_2 + m \rho_3 + e \Phi .$$

Le système de 2 équations correspondant aux particules de spin 0 s'écrit

$$(II.19) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi , \quad \text{où} \quad H = \frac{1}{2m} \Pi^2 (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) + m \rho_3 + e \Phi .$$

D'une façon formelle, on passe de (II.18) à (II.19) en posant $\vec{S} = 0$.

1. *Particule libre.* — Considérons dans l'espace des moments l'équation hamiltonienne suivante :

$$(II.20) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{p}, t) = H \psi(\vec{p}, t) ,$$

$$\text{où} \quad H = \frac{p^2}{2m} (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) - \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{m} \mathbf{i} \rho_2 + m \rho_3 .$$

La fonction d'onde ψ est ici une matrice colonne à 6 composantes. Comme dans le cas de Dirac, nous poserons

$$(II.21) \quad \psi(\vec{p}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}, t) \\ \chi(\vec{p}, t) \end{pmatrix} ,$$

où φ et χ sont des spineurs à trois composantes. Nous admettrons en outre que (II.20) a des solutions ondes planes de la forme

$$(II.22) \quad \psi(\vec{p}, t) = \psi_0(\vec{p}) \mathbf{e}^{-iEt} = \begin{pmatrix} \varphi_0(\vec{p}) \\ \chi_0(\vec{p}) \end{pmatrix} \mathbf{e}^{-iEt} .$$

L'équation (II.20) donne alors le système suivant :

$$(II.23) \quad \begin{cases} (E - m) \varphi_0 = \frac{p^2}{m} (\varphi_0 + \chi_0) - \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{m} \chi_0, \\ (E + m) \varphi_0 = -\frac{p^2}{m} (\varphi_0 + \chi_0) + \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{m} \varphi_0. \end{cases}$$

Les solutions associées de (II.23) sont :

1° $E = + E_p$,

$$(II.24a) \quad \begin{cases} \varphi_0^{(+)}(\vec{p}) = \frac{E_p + m}{2 \sqrt{m E_p}}, \\ \chi_0^{(+)}(\vec{p}) = \frac{-\{p^2 - 2(\vec{S} \cdot \vec{p})^2\}}{2(E_p + m) \sqrt{m E_p}}, \end{cases} \quad (\varphi_0^{(+)})^2 - (\chi_0^{(+)})^2 = 1;$$

2° $E = - E_p$,

$$(II.24b) \quad \begin{cases} \varphi_0^{(-)}(\vec{p}) = \frac{-E_p + m}{2 \sqrt{m E_p}}, \\ \chi_0^{(-)}(\vec{p}) = \frac{-\{p^2 - 2(\vec{S} \cdot \vec{p})^2\}}{2(-E_p + m) \sqrt{m E_p}}, \end{cases} \quad (\varphi_0^{(-)})^2 - (\chi_0^{(-)})^2 = -1.$$

Nous avons aussi

$$\psi_0^{(+)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(+)}(\vec{p}) \\ \chi_0^{(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad \psi_0^{(-)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(-)}(\vec{p}) \\ \chi_0^{(-)}(\vec{p}) \end{pmatrix}.$$

Définissons alors une nouvelle représentation par la relation

$$(II.25) \quad \psi(\vec{p}, t) = \mathbf{U}(\vec{p}) \psi'(\vec{p}, t),$$

où la transformation $\mathbf{U}(\vec{p})$ est un opérateur-matrice. Posant

$$\psi'(\vec{p}, t) = \begin{pmatrix} \varphi'(\vec{p}, t) \\ \chi'(\vec{p}, t) \end{pmatrix},$$

nous avons $\varphi' = \frac{1}{2}(1 + \rho_3) \psi'$, $\chi' = \frac{1}{2}(1 - \rho_3) \psi'$.

On peut voir facilement que

$$(II.26) \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varphi_0^{(+)} & \varphi_0^{(-)} \\ \chi_0^{(+)} & \chi_0^{(-)} \end{bmatrix}.$$

En utilisant les solutions associées (II.24), nous trouvons

$$(II.27) \quad \mathbf{U}(\vec{p}) = \frac{E_p + m}{2 \sqrt{m E_p}} \left[1 - \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{p^2} \right] + \frac{(E_p + m) \rho_3 - (E_p - m) \mathbf{i} \rho_2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2 \sqrt{m E_p} p^2} - \frac{E_p - m}{2 \sqrt{m E_p}} \left[1 - \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{p^2} \right] \rho_1.$$

L'hamiltonien transformé devient alors

$$(II.28) \quad \mathbf{H}' = \mathbf{U}^{-1}(\vec{p}) \mathbf{H} \mathbf{U}(\vec{p}) = \rho_3 E_p.$$

L'équation (II.20) s'écrira alors

$$(II.29) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi'(\vec{p}, t) = E_p \varphi'(\vec{p}, t), \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \chi'(\vec{p}, t) = -E_p \chi'(\vec{p}, t).$$

Quant à l'opérateur de position nous obtenons, après un long calcul, le résultat suivant :

$$(II.30) \quad \vec{x}' = \vec{x} - \frac{\mathbf{i} \vec{p}}{2 E_p^2} \rho_1 - \frac{4 \vec{p} (\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{p^2 p^2} + \\ + \left[1 - \frac{E_p}{2 m} (\rho_3 - \mathbf{i} \rho_2) - \frac{m}{2 E_p} (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) \right] \frac{\vec{p} \wedge \vec{S}}{p^2}.$$

1. *Particule placée dans un champ électromagnétique statique.* — Considérons alors les équations (II.18). L'étude de l'approximation non relativiste semble plus facile si nous passons dans la nouvelle représentation définie par (II.27) :

$$(II.31) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\vec{p}, t) = \{ \mathbf{U}^{-1}(\vec{p}) \mathbf{H}(\vec{p}) \mathbf{U}(\vec{p}) \} \psi'(\vec{p}, t).$$

Nous poserons, pour simplifier les calculs, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$,

$$\mathbf{H}_0 = \frac{p^2}{2 m} (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) - \frac{(S \cdot p)^2}{m} \mathbf{i} \rho_2 + m \rho_3,$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{e^2}{2 m} A^2 (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) - \frac{e}{2 m} (p A + A p) (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) + \\ + \frac{e}{2 m} (\vec{S} \cdot \vec{\nabla}) (\rho_3 + \mathbf{i} \rho_2) - \frac{e^2}{m} (S A)^2 \mathbf{i} \rho_2 + \frac{e}{m} (S p \cdot S A + S A \cdot S p) + e \Phi.$$

L'équation (II.31) s'écrira alors

$$(II.32) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\vec{p}, t) = \rho_3 E_p \psi'(\vec{p}, t) + \{ \mathbf{U}^{-1}(\vec{p}) \mathbf{H}_1 \mathbf{U}(\vec{p}) \} \psi'(\vec{p}, t).$$

Dans les calculs qui suivent, nous utilisons les transformées de Fourier des différentes fonctions. Ainsi $\mathbf{U}(\vec{q})$, $\Phi(\vec{q})$, $A(\vec{q})$, ... seront les transformées de Fourier de $\mathbf{U}(\vec{p})$, $\Phi(\vec{p})$, $A(\vec{p})$, ... Alors, l'équation (II.32) se découple, après un long calcul, en un système de deux équations suivantes :

$$(II.33a) \quad \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi'(p, t) = E_p \varphi'(p, t) + \int d^3 q \left\{ e \Phi(p - q) + \right. \\ + \frac{2 e}{m} [S q \cdot S A(p - q)] \left. \right\} \left[\left(\frac{E_p}{2 \sqrt{E_p E_q}} + \frac{E_p - m}{2 \sqrt{E_p E_q}} \alpha \right) (\varphi' + \chi') + \right. \\ + \left(\frac{E_q}{2 \sqrt{E_p E_q}} + \frac{E_p - m}{2 m \sqrt{E_p E_q}} E_q \alpha \right) (\varphi' - \chi') \left. \right] - \frac{e^2}{m} \int d^3 q [S A(p - q)]^2 + \\ \times \left\{ \left[\frac{E_p}{2 \sqrt{E_p E_q}} \gamma - \frac{m}{2 \sqrt{E_p E_q}} (\beta - 1) \right] (\varphi' + \chi') - \left[\frac{E_q}{2 \sqrt{E_p E_q}} \gamma - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{E_p E_q}{2 m \sqrt{E_p E_q}} (\beta - 1) \right] (\varphi' - \chi') \right\} + \int d^3 q \left[\frac{e^2}{2 m} A^2(p - q) - \right.$$

$$-\frac{e}{m} q A(p-q) + \frac{e}{2m} S \mathcal{H}(p-q) \left\{ \left[\frac{m}{\sqrt{E_p E_q}} (1-\beta) + \frac{E_p}{\sqrt{E_p E_q}} \frac{(Sp)^2}{p^2} - \frac{E_p-m}{\sqrt{E_p E_q}} \delta \right] (\varphi' + \chi') + \left[\frac{E_q}{\sqrt{E_p E_q}} \frac{(Sq)^2}{q^2} + \frac{E_p-m}{m \sqrt{E_p E_q}} E_q \delta \right] (\varphi' - \chi') \right\},$$

$$(II.33b) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \chi'(p, t) = -E_p \chi'(p, t) + \int d^3 q \left\{ e \Phi(p-q) + \right.$$

$$+ \frac{2e}{m} [Sq \cdot S A(p-q)] \left\{ \left[\left(\frac{E_p}{2\sqrt{E_p E_q}} - \frac{E_p+m}{2\sqrt{E_p E_q}} \alpha \right) (\varphi' + \chi') - \right. \right.$$

$$\left. - \left(\frac{E_q}{2\sqrt{E_p E_q}} - \frac{E_p+m}{2m\sqrt{E_p E_q}} E_q \alpha \right) (\varphi' - \chi') \right\} - \frac{e^2}{m} \int d^3 q [S A(p-q)]^2 \cdot$$

$$\times \left\{ \left[\frac{E_p}{2\sqrt{E_p E_q}} \gamma + \frac{m}{2\sqrt{E_p E_q}} (\beta-1) \right] (\varphi' + \chi') + \left[\frac{E_q}{2\sqrt{E_p E_q}} \gamma - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{E_p E_q}{2m\sqrt{E_p E_q}} (\beta-1) \right] (\varphi' - \chi') \right\} + \int d^3 q \left[\frac{e^2}{2m} A^2(p-q) - \right.$$

$$\left. - \frac{e}{m} q A(p-q) + \frac{e}{2m} S \mathcal{H}(p-q) \right\} \left\{ \left[-\frac{m}{\sqrt{E_p E_q}} (1-\beta) - \frac{E_p}{\sqrt{E_p E_q}} \frac{(Sp)^2}{p^2} - \frac{E_p+m}{\sqrt{E_p E_q}} \delta \right] (\varphi' + \chi') + \left[-\frac{E_q}{\sqrt{E_p E_q}} \frac{(Sq)^2}{q^2} + \frac{E_p+m}{m\sqrt{E_p E_q}} E_q \delta \right] (\varphi' - \chi') \right\},$$

où

$$\alpha = \left(\frac{Sp}{p} - \frac{Sq}{q} \right)^2, \quad \beta = \frac{(Sp)^2}{p^2} + \frac{(Sq)^2}{q^2},$$

$$\gamma = \frac{(Sp)^2}{p^2} - \frac{(Sq)^2}{q^2}, \quad \delta = \frac{(Sp)^2}{p^2} \frac{(Sq)^2}{q^2}.$$

Rappelons que, si $S = 0$ (méson scalaire chargé), les deux équations précédentes se confondent avec le système obtenu (2.55a, b) par Feshbach & Villars [34].

Nous allons étudier l'approximation non relativiste du système précédent en considérant des champs très faibles. A cette approximation, les composantes χ' seront toujours très petites par rapport aux composantes φ' . Nous pouvons donc éliminer χ' dans le système précédent et obtenir une seule équation en φ' , ce que nous ferons en considérant séparément les deux champs électrique et magnétique.

A) CHAMP ÉLECTRIQUE. — Nous avons alors l'équation suivante où nous avons précédemment séparé les quantités dépendant du spin de celles qui n'en dépendent pas :

$$(II.34) \quad i \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - E_p \varphi' + \int d^3 q e \Phi(p-q) \frac{E_p + E_q}{2\sqrt{E_p E_q}} \varphi'(q) +$$

$$+ \int d^3q e \Phi(p-q) \frac{(E_p-m)(E_q-m)}{2m\sqrt{E_p E_q}} \left(\frac{S p}{p} - \frac{S q}{q} \right)^2 \varphi'(q).$$

Or, dans l'approximation considérée, on a

$$\frac{E_p + E_q}{2\sqrt{E_p E_q}} \sim 1, \quad \frac{(E_p-m)(E_q-m)}{2m\sqrt{E_p E_q}} \sim \frac{p^2 q^2}{4m^3}.$$

Ainsi (II.34) devient

$$(II.35) \quad i \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = m \varphi' + \frac{p^2}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{4m^2} \right) \varphi' + \int d^3q e \Phi(p-q) \varphi'(q) + \frac{p^3}{4m^3} \int d^3q e \Phi(p-q) q^2 \left(\frac{S p}{p} - \frac{S q}{q} \right)^2 \varphi'(q).$$

B) CHAMP MAGNÉTIQUE. — Nous considérons un champ magnétique faible avec la jauge $\text{div} \vec{A} = 0$ ou $(p-q) \cdot \vec{A}(p-q) = 0$. D'autre part, pour ce champ magnétique homogène, nous avons $A(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{r})$,

$$\vec{A}(p-q) = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{i} \cdot \vec{p}) \delta(p-q) = \frac{1}{2} \vec{\eta} \delta(p-q), \text{ avec } \vec{\eta} = \vec{\mathcal{H}} \wedge \vec{i} \cdot \vec{\nabla}_p.$$

Dans l'approximation considérée, nous déduisons de (II.33a)

$$(II.36) \quad i \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \left[E_p - \frac{e}{2E_p} (\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{L}) - \frac{e}{m^2 E_p} (\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{p}) (\vec{S} \cdot \vec{L}) (\vec{S} \cdot \vec{p}) + \frac{e}{m} (\vec{S} \cdot \vec{p}) (\vec{S} \cdot \vec{\eta}) + \frac{e}{2m^2 E_p} (\vec{S} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{\eta}) (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 \right] \varphi'.$$

4. **Conclusion.** — Nous avons développé dans ce chapitre deux méthodes différentes adaptées aux deux formalismes des particules de spin 0 ou 1 pour dégager au mieux l'interprétation physique de ces particules. Nous avons montré également que l'étude de l'approximation non relativiste ne se fait aisément qu'avec la théorie restreinte de Petiau puisque, contrairement à ce qui se passe dans la théorie de la fusion de L. de Broglie, on peut ici introduire un champ extérieur. Nous avons montré que l'étude non relativiste de la théorie restreinte de Petiau s'effectuait en passant dans une autre représentation par une transformation unitaire. Cette étude, tout en retrouvant quelques résultats de Feshbach & Villars pour les particules de spin 0, généralise aux particules de spin maximum 1 l'étude faite au chapitre I pour les particules de spin 1/2.

III. PARTICULES DE SPIN QUELCONQUE :

étude de l'opérateur de position

1. **Introduction.** — Parmi les divers formalismes des particules de spin quelconque, nous considérerons la théorie de la fusion de L. de Broglie qui offre, entre autres avantages, celui de fournir une interprétation physique des opérateurs dynamiques. Nous avons vu, en effet, que ceux-ci offraient des ambiguïtés quand on leur donne la même signification physique dans les deux théories relativiste et

non relativiste. Nous allons donc traiter ce problème, d'une façon générale, à la lumière des méthodes et des résultats obtenus dans les deux premiers chapitres.

Nous rappelons d'abord la théorie de la fusion de L. de Broglie pour une particule de spin quelconque sous la forme donnée par G. Petiau et nous définissons une nouvelle représentation par l'intermédiaire d'une transformation unitaire. Nous montrons que, pour une particule de spin $n/2$ ($n = 1, 2, \dots$), cette transformation unitaire est égale au produit tensoriel de n transformations élémentaires du type de FW. Grâce à cette nouvelle représentation, nous calculons les opérateurs hamiltonien et de position transformés.

Puis, nous développons le formalisme de Newton & Wigner sur les états localisés et nous calculons l'opérateur de position d'un système localisé de spin quelconque.

Finalement, nous comparons les opérateurs de position obtenus par les deux méthodes et nous remarquons essentiellement :

a) que ces deux opérateurs sont identiques quand la particule ou le système a le spin $1/2$;

b) qu'ils sont différents si le spin est supérieur à $1/2$.

Nous montrons que cette divergence, pour les particules de spin supérieur à $1/2$, est due à la différence des métriques utilisées dans les deux formalismes.

2. Etude de l'opérateur de position. Nous allons d'abord déterminer l'opérateur de position dans le formalisme de fusion de L. de Broglie et dans celui de Newton & Wigner et nous ferons ensuite une étude comparée de ces deux opérateurs.

1. Le formalisme de fusion de L. de Broglie et la définition de l'opérateur de position. — Les 4^n fonctions d'onde $\psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, t)$ de la particule de spin maximal $n/2$ ($n = 1, 2, \dots$), ainsi que les fonctions d'onde initiales $F_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) = \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, 0)$ obéissent aux systèmes suivants :

$$(III.1) \quad \begin{cases} (s + m) \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, t) = 0, \\ A_n (s^{(i)} - s^{(j)}) \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, t) = 0, \\ (\beta^{(i)} h^{(i)} - \beta^{(j)} h^{(j)}) F_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) = 0, \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$; $i \neq j$; $i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3, 4$,

où $s = p_0 \mathcal{A}_0 + \vec{p} \cdot \vec{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{A}_0 = A_n A_0, \quad \vec{\mathcal{A}} = A_n \vec{A},$

$$(III.2) \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{n} (\alpha_0^{(1)} \otimes \beta^{(2)} \otimes \dots \otimes \beta^{(n)} + \dots + \beta^{(1)} \otimes \beta^{(2)} \otimes \dots \otimes \alpha_0^{(n)}), \\ \vec{A} = \frac{1}{n} (\vec{\alpha}^{(1)} \otimes \beta^{(2)} \otimes \dots \otimes \beta^{(n)} + \dots + \beta^{(1)} \otimes \beta^{(2)} \otimes \dots \otimes \vec{\alpha}^{(n)}), \\ A_n = \beta^{(1)} \otimes \beta^{(2)} \otimes \dots \otimes \beta^{(n)}, \\ B_{ij} = \frac{1}{n} A_n (\beta^{(i)} - \beta^{(j)}), \quad \vec{B}_{ij} = \frac{1}{n} A_n (\beta^{(i)} \vec{\alpha}^{(i)} - \beta^{(j)} \vec{\alpha}^{(j)}). \end{cases}$$

A) SOLUTION GÉNÉRALE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DES PARTICULES DE SPIN $n/2$. — Nous avons à résoudre le système (III.1) dans le cas des ondes planes. Nous écrirons donc

$$(III.3) \quad \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, t) = \psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) e^{iWt} + \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) e^{-iWt},$$

où l'énergie de la particule de spin $n/2$ est $E = \pm W$ avec $W = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. En portant (III.3) dans les systèmes (III.1), nous obtenons facilement les systèmes suivants :

$$(III.4a) \quad \begin{cases} (-W \mathcal{L}_0 + \vec{p} \cdot \vec{\mathcal{L}} + m) \psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) = 0, \\ (-W B_{ij} + \vec{p} \cdot \vec{B}_{ij}) \psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) = 0, \end{cases}$$

$$(III.4b) \quad \begin{cases} (W \mathcal{L}_0 + \vec{p} \cdot \vec{\mathcal{L}} + m) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0, \\ (W B_{ij} + \vec{p} \cdot \vec{B}_{ij}) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

En tenant compte des définitions des matrices $\mathcal{L}_0, \vec{\mathcal{L}}, B_{ij}, \vec{B}_{ij}$, les systèmes (III.4) se transforment en

$$(III.5a) \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^n \beta^{(r)} (W + h^{(r)}) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0, \\ [\beta^{(i)} (W + h^{(i)}) - \beta^{(j)} (W + h^{(j)})] \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0, \end{cases}$$

$$(III.5b) \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^n \beta^{(r)} (W - h^{(r)}) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0, \\ [\beta^{(i)} (W - h^{(i)}) - \beta^{(j)} (W - h^{(j)})] \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Les systèmes (III.5) se résolvent facilement et nous obtenons finalement

$$(III.6) \quad \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, t) = \mu (W - h^{(1)}) \dots (W - h^{(n)}) F_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) e^{-iWt} + \\ + \mu (W + h^{(1)}) \dots (W + h^{(n)}) F_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) e^{iWt}.$$

Les fonctions F^+ et F^- doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$(W + h^{(1)}) F^+ = 0, \quad (W + h^{(1)}) \dots (W + h^{(n)}) F^- = F^-, \\ (W - h^{(1)}) F^- = 0, \quad (W - h^{(1)}) \dots (W - h^{(n)}) F^+ = F^+.$$

B) DÉFINITION ET CALCUL D'UNE TRANSFORMATION GÉNÉRALE. — Définissons une transformation générale $T(\vec{p})$ par

$$(III.7) \quad \psi'_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, t) = T(\vec{p}) \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}, t),$$

avec

$$(III.8) \quad \begin{cases} \psi'_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{L}_0) \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) = T(\vec{p}) \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}), \\ \psi'_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{L}_0) \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) = T(\vec{p}) \psi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}). \end{cases}$$

Ainsi, les fonctions d'onde $\psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x})$ et $\psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x})$ définies arbitrairement dans (III.3) se trouvent être les fonctions d'onde positives (correspondant à notre hypothèse $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \dots = \beta^{(n)} = 1$) et négatives ($\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \dots = \beta^{(n)} = -1$).

Le système (III.8) peut aussi s'écrire

$$(III.9) \quad (\mathcal{A}_0 - 1) \psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) = 0, \quad (\mathcal{A}_0 + 1) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0.$$

Si n est pair, nous allons multiplier à gauche chacune des équations de (III.9) par l'expression

$$a_n \mathcal{A}_0 \prod_{r=1,2}^{(n-2)/2} \left(\frac{n^2}{4} \mathcal{A}_0^2 - r^2 \right),$$

a_n étant une constante réelle et nous obtenons

$$(III.10) \quad \begin{cases} a_n \mathcal{A}_0 (\mathcal{A}_0 - 1) \prod_{r=1,2}^{(n-2)/2} \left(\frac{n^2}{4} \mathcal{A}_0^2 - r^2 \right) \psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) = 0, \\ a_n \mathcal{A}_0 (\mathcal{A}_0 + 1) \prod_{r=1,2}^{(n-2)/2} \left(\frac{n^2}{4} \mathcal{A}_0^2 - r^2 \right) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Si n est impair, nous multiplierons à gauche chacune des équations de (III.9) par l'expression

$$b_n \prod_{r'=1,3}^{n-2} (n^2 \mathcal{A}_0^2 - r'^2),$$

b_n étant une constante réelle et nous obtenons

$$(III.11) \quad \begin{cases} b_n (\mathcal{A}_0 - 1) \prod_{r'=1,3}^{n-2} (n^2 \mathcal{A}_0^2 - r'^2) \psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) = 0, \\ b_n (\mathcal{A}_0 + 1) \prod_{r'=1,3}^{n-2} (n^2 \mathcal{A}_0^2 - r'^2) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Par suite, les systèmes (III.10) et (III.11) donnent, quel que soit n ,

$$(III.12) \quad \begin{cases} (1 - \beta^{(1)}) (1 - \beta^{(2)}) \dots (1 - \beta^{(n)}) \psi_{i_1 \dots i_n}^+(\vec{x}) = 0, \\ (1 + \beta^{(1)}) (1 + \beta^{(2)}) \dots (1 + \beta^{(n)}) \psi_{i_1 \dots i_n}^-(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

Ce système s'écrit

$$(III.13) \quad \begin{cases} (1 - \beta^{(1)}) (1 - \beta^{(2)}) \dots (1 - \beta^{(n)}) T(\vec{p}) (W + h^{(1)}) \times \\ \quad \times (W + h^{(2)}) \dots (W + h^{(n)}) = 0, \\ (1 + \beta^{(1)}) (1 + \beta^{(2)}) \dots (1 + \beta^{(n)}) T(\vec{p}) (W - h^{(1)}) \times \\ \quad \times (W - h^{(2)}) \dots (W - h^{(n)}) = 0. \end{cases}$$

Si

$$(III.14) \quad T = T^{(1)} \otimes T^{(2)} \otimes T^{(3)} \otimes \dots \otimes T^{(n)},$$

le système (III.13) se réduit à

$$(III.15) \quad (1 + \beta^{(i)}) T^{(i)} (W - h^{(i)}) = 0, \quad (1 - \beta^{(i)}) T^{(i)} (W + h^{(i)}) = 0,$$

avec $i = 1, 2, \dots, n$.

Les $T^{(i)}$, définies par (III.15), ne sont autres que les transformations élémen-

taires correspondant aux particules de spin $1/2$, à la constante de normalisation près. Il en résulte que la transformation générale pour une particule de spin quelconque $n/2$ est le produit tensoriel de n transformations élémentaires correspondant chacune à la particule de spin $1/2$.

Sachant que les transformations élémentaires ont pour expression

$$T^{(1)} = \lambda_0 (W + \beta h)^{(1)},$$

la transformation générale T s'écrit

$$(III.16) \quad T(\vec{p}) = \Lambda_n (W + \beta h)^{(1)} \otimes (W + \beta h)^{(2)} \otimes \dots \otimes (W + \beta h)^{(n)}.$$

Pour calculer la constante de normalisation Λ_n , nous partons de l'hypothèse que la densité de probabilité de présence reste inchangée par T et nous écrivons que les parties positives (correspondant aux fonctions d'onde positives définies dans la première partie) de ces densités sont les mêmes.

Nous obtenons ainsi

$$(III.17) \quad \Lambda_n = [2(W + m)]^{-n/2} m^{(1-n)/2} W^{-1/2}.$$

C) CALCUL DES OPÉRATEURS HAMILTONIEN ET DE POSITION TRANSFORMÉS. — Considérons d'abord l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \beta^{(1)} \otimes \beta^{(2)} \otimes \dots \otimes \beta^{(r-1)} \otimes h^{(r)} \otimes \beta^{(r+1)} \otimes \dots \otimes \beta^{(n)}.$$

Par T , il devient $H' = T H T^{-1}$. Donc

$$(III.18) \quad \{H'\}_+ = W.$$

Ce résultat confirme le sens classique de l'hamiltonien. Notons toutefois que ce résultat est une approximation. Nous avons en effet éliminé de H' les parties impaires correspondant aux mélanges d'énergies positive et négative. Ce résultat met bien en évidence la différence avec le cas de Dirac (cf. chap. I) où l'hamiltonien transformé est exactement égal à l'énergie.

Calculons maintenant l'opérateur de position transformé $\vec{x}' = T \vec{x} A_0 T^{-1}$. Nous obtenons finalement

$$(III.19) \quad \{\vec{x}'\}_+ = \vec{x} - \frac{m - (n-1)W}{2mW(W+m)} (\vec{\sigma} \wedge \vec{p}),$$

où $\vec{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}^{(i)}$. Pour $n = 2$ correspondant à la particule de spin 1, nous obtenons la même expression que celle du chapitre II. Pour le photon, l'expression (III.19) n'est pas définie.

2. Le formalisme de Newton & Wigner et la définition de l'opérateur de position. — Newton & Wigner essayent de formuler les propriétés des états localisés en se basant uniquement sur les lois d'invariance. La principale propriété de ces états localisés est la suivante.

Soit un ensemble d'états localisés en un point ; si on fait subir à un état une translation, il devient orthogonal aux autres états non déplacés, localisés toujours au même point.

Ces propriétés définissent, d'une façon unique, l'ensemble des états localisés pour des systèmes élémentaires de spin quelconque et de masse non nulle. Les

fonctions localisées appartiendraient alors à un spectre continu d'un opérateur qu'il est normal d'appeler « opérateur de position ». Cet opérateur aura la propriété de conserver le caractère d'énergie positive de la fonction d'onde à laquelle il est appliqué. Les états localisés sont donc des fonctions caractéristiques des opérateurs de position et ceux-ci s'obtiennent à partir des fonctions caractéristiques.

Dans ce formalisme, on appelle système élémentaire un ensemble d'états décrit par une représentation irréductible du groupe inhomogène de Lorentz. L'ensemble des états localisés en un point O et à un instant donné doit satisfaire dans l'espace tridimensionnel aux axiomes suivants :

- a) il forme une multiplicité linéaire ;
- b) il est invariant par rapport aux rotations autour de O , aux réflexions d'espace et à l'inversion temporelle ;
- c) il est orthogonal à toutes les translations d'espace ;
- d) il obéit à la condition de régularité suivante : les opérateurs infinitésimaux du groupe de Lorentz sont applicables sur ces états localisés.

Le problème revient ainsi à déterminer les fonctions d'onde localisées et de là il est facile d'obtenir l'opérateur de position. Calculons celui-ci pour un système élémentaire de spin quelconque et de masse non nulle.

Considérons les fonctions d'onde définies sur la partie positive de l'hyperboloïde $W^2 = \vec{p}^2 + m^2$ et soit n variables de spin $\xi_1, \dots, \xi_n$. En considérant le produit scalaire covariant dans l'espace des moments

$$(III.20) \quad \langle \psi, \Phi \rangle = \int W^{-n-1} \psi^* \Phi \, dp,$$

les fonctions d'onde localisées à l'origine satisfont à

$$(III.21) \quad \sum_{\xi} |\psi_{\xi}|^2 = (2\pi)^{-3} W^{-n+1}.$$

Il est alors possible de définir les différents opérateurs d'invariance. Ainsi,

a) l'opérateur d'inversion temporelle est

$$\Theta \psi(p_1, p_2, p_3) = \mathbf{C} \psi(-p_1, -p_2, -p_3)^*,$$

$$\mathbf{C} = \prod_{\alpha=1}^n \gamma_2^{\alpha} \gamma_3^{\alpha}, \quad \mathbf{C}^2 = (-1)^n, \quad \Theta^2 = (-1)^n;$$

b) l'opérateur d'inversion de coordonnées est

$$\mathbf{I} \psi(p_1, p_2, p_3) = \gamma_0^1 \dots \gamma_0^n \psi(-p_1, -p_2, -p_3).$$

On trouve finalement, pour les fonctions d'onde localisées les $n+1$ fonctions

$$(III.22) \quad \psi_m = (2\pi)^{-3/2} 2^{n/2} p_0^{n+(1/2)} (W+m)^{-n/2} V_m(p_1, p_2, p_3; \xi_1, \dots, \xi_n),$$

où V_m représente un état de moment cinétique m autour du troisième axe de coordonnées ; sa normalisation est $\sum_{\xi} |V_m|^2 = [(W+m)^2 W]^n$. Pour calculer maintenant l'opérateur de position, il suffit d'appliquer à (III.22) l'opérateur de déplacement $T(a)$, dans l'espace des moments, défini par $T(a) \psi = \exp[-i(\vec{a} \cdot \vec{p})] \psi$. Tous calculs faits, on trouve

$$(III.23) \quad \vec{q} = E \prod_{\alpha=1}^n (1 + \gamma_0^{\alpha}) \frac{W^{n+(1/2)}}{(W+m)^{n/2}} \left(-i \frac{\vec{\partial}}{\partial p} \right) \frac{W^{-1/2}}{(W+m)^{n/2}} E,$$

où $E = E_1 E_2 \dots E_n$, $E_1 = \frac{1}{2} W^{-1} (\gamma_{\mu}^1 p_{\mu} + m) \gamma_0^1$.

Ce formalisme de NW (Newton & Wigner), rappelé assez brièvement, conduit aux résultats fondamentaux suivants :

a) il donne pour les particules représentées par l'équation de Klein-Gordon la relation bien connue

$$\vec{q} = -i \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\vec{p}}{2 p_0^2} \right)$$

en accord avec nos résultats du chapitre II ;

b) il montre que le photon n'est pas localisable ;

c) il permet de déterminer, à partir des lois d'invariance, les caractères physiques d'un système quantique.

3. *Comparaison des deux « opérateurs de position »* (III.19) et (III.23). — Pour pouvoir les comparer, nous allons d'abord éliminer de (III.23) les parties impaires et poser dans le résultat obtenu $\gamma_0^i = 1$, ce qui correspond à notre définition des énergies positives.

Un calcul assez long nous conduit alors à l'opérateur

$$(III.24) \quad \{\vec{q}\}_- = \left[-i \frac{\partial}{\partial p} - \frac{(n+1)(W+m) + 2nW}{2W^2(W+m)} i \vec{p} \right] - \frac{n(\vec{\sigma} \wedge \vec{p})}{2W(W+m)}.$$

Nous allons ensuite transformer (III.24) de façon à revenir dans l'espace des positions. A cet effet, il suffit de considérer une fonction d'onde

$$(III.25) \quad \psi(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p W^{(n+1)/2} (W+m)^n e^{-iWx_0} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{p})$$

pour s'apercevoir que la quantité

$$-i \frac{\partial}{\partial p} + \frac{(n+1)(W+m) + 2nW}{2W^2(W+m)} i \vec{p}$$

est l'équivalent de $\vec{x}$ dans l'espace des positions. Finalement, nous obtenons pour l'opérateur de position, dans l'espace des positions et correspondant aux énergies positives, l'expression

$$(III.26) \quad \{\vec{q}\}_+ = \vec{x} - \frac{n(\vec{\sigma} \wedge \vec{p})}{2W(W+m)}.$$

Considérant alors l'expression (III.19), nous constatons que (III.26) et (III.19) diffèrent par le coefficient de $(\vec{\sigma} \wedge \vec{p})$. Cette différence est due à celle des définitions des densités de probabilité de présence. En effet nous avons défini celle-ci comme étant $\rho = \psi^* A_0 \psi$, alors que NW la définissent par $\rho = W^{-n-1} \psi^* \psi$.

Si nous tenons compte de cette deuxième définition et conduisons le calcul comme nous l'avons fait précédemment, nous aboutissons à une transformation générale $\mathcal{T}$ différente de la transformation T :

$$(III.27) \quad \mathcal{T} = T_D^{(1)} \otimes T_D^{(2)} \otimes \dots \otimes T_D^{(n)}.$$

L'opérateur de position transformé devient alors

$$(III.28) \quad \vec{x}' = \mathcal{T} \vec{x} \mathcal{T}^{-1},$$

$$\vec{x}' = (T_D^{(1)} \otimes \dots \otimes T_D^{(n)}) \vec{x} (T_D^{(n)-1} \otimes \dots \otimes T_D^{(1)-1}),$$

$$(III.29) \quad \{\vec{x}'\}_+ = \vec{x} - \frac{n(\vec{\sigma} \wedge \vec{p})}{2W(W+m)}.$$

L'expression (III.29) ainsi obtenue est exactement identique à (III.26).

3. **Conclusion.** — Nous avons donc étudié dans ce chapitre les deux formalismes de L. de Broglie et de Newton & Wigner pour décrire une particule ou un système élémentaire de spin quelconque et de masse non nulle. Nous avons déterminé en particulier les fonctions d'onde caractéristiques et les opérateurs de position. Nous avons montré que la divergence dans l'expression des deux opérateurs de position est due à la différence de définition de la densité de probabilité de présence. Nous avons néanmoins noté que les deux opérateurs de position étaient identiques dans le cas de l'électron et qu'il ne semble pas possible de localiser le photon.

CONCLUSION GÉNÉRALE

En résumé, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir des opérateurs, qui soient des observables, en mécanique quantique relativiste et nous les avons déterminés pour : *a*) les électrons (chap. I) ; *b*) les bosons de spin 0 ou 1 (chap. II) ; *c*) les particules de spin quelconque et de masse non nulle (chap. III).

L'attention est portée particulièrement sur l'opérateur de position : celui-ci est en effet étroitement lié au problème de la mesure en mécanique quantique. Nous avons réussi à établir dans tous les cas, en imposant toutefois quelques restrictions, l'opérateur de position dans l'espace tridimensionnel.

Dans le dernier chapitre, nous avons déterminé l'opérateur de position dans le formalisme de L. de Broglie et comparé celui-ci à celui obtenu par Newton & Wigner. Cette étude permet d'établir le résultat important suivant : *a*) dans le cas du photon, bien que les opérateurs considérés soient différents, ils expriment que le photon n'est pas localisable ; *b*) dans le cas de l'électron, ces opérateurs se révèlent être identiques.

Notre méthode semble s'imposer toutes les fois qu'il est nécessaire d'étudier soit l'approximation non relativiste des équations d'ondes relativistes, soit l'interprétation physique des opérateurs dynamiques des particules libres.

Cette étude nous montre également, comme le remarque A. S. Wightman, qu'il existe un problème important, non encore résolu, celui de la localisation d'un système, élémentaire ou composé, en mécanique quantique.

L'opérateur de position a été obtenu, aussi bien dans ce travail que dans celui de Newton & Wigner, dans le cadre d'une théorie sans interaction et en postulant pour la fonction d'onde soit une loi de transformation particulière, soit l'invariance par certaines propriétés.

Ainsi le présent travail constitue une introduction à des théories dynamiques des particules élémentaires susceptibles de donner des opérateurs de position qui soient des observables. Il n'en reste pas moins que les résultats obtenus ici peuvent être utilisés dans la physique actuelle des particules élémentaires.

MÉCANIQUE RELATIVISTE DES PARTICULES A SPIN

RÉFÉRENCES

A) Ouvrages d'ensemble

- [1] H. A. BETHE & E. A. SALPETER, Quantum mechanics of one and two electron atoms, éd. Springer, Berlin, 1957.
- [2] L. DE BROGLIE, Théorie générale des particules à spin, 2^{me} éd. Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [3] P. A. M. DIRAC, The principles of quantum mechanics, 3^{me} éd. Oxford Univ. Press, 1947.
- [4] W. PAULI, Handbuch der Physik, éd. Springer, Berlin, 1958, t. 5-1.
- [5] S. S. SCHWEBER, An introduction to relativistic quantum field theory, éd. Row-Peter-son, New York, 1961.
- [6] F. RIESZ & B. NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1955.

B) Sur les particules de spin 1/2

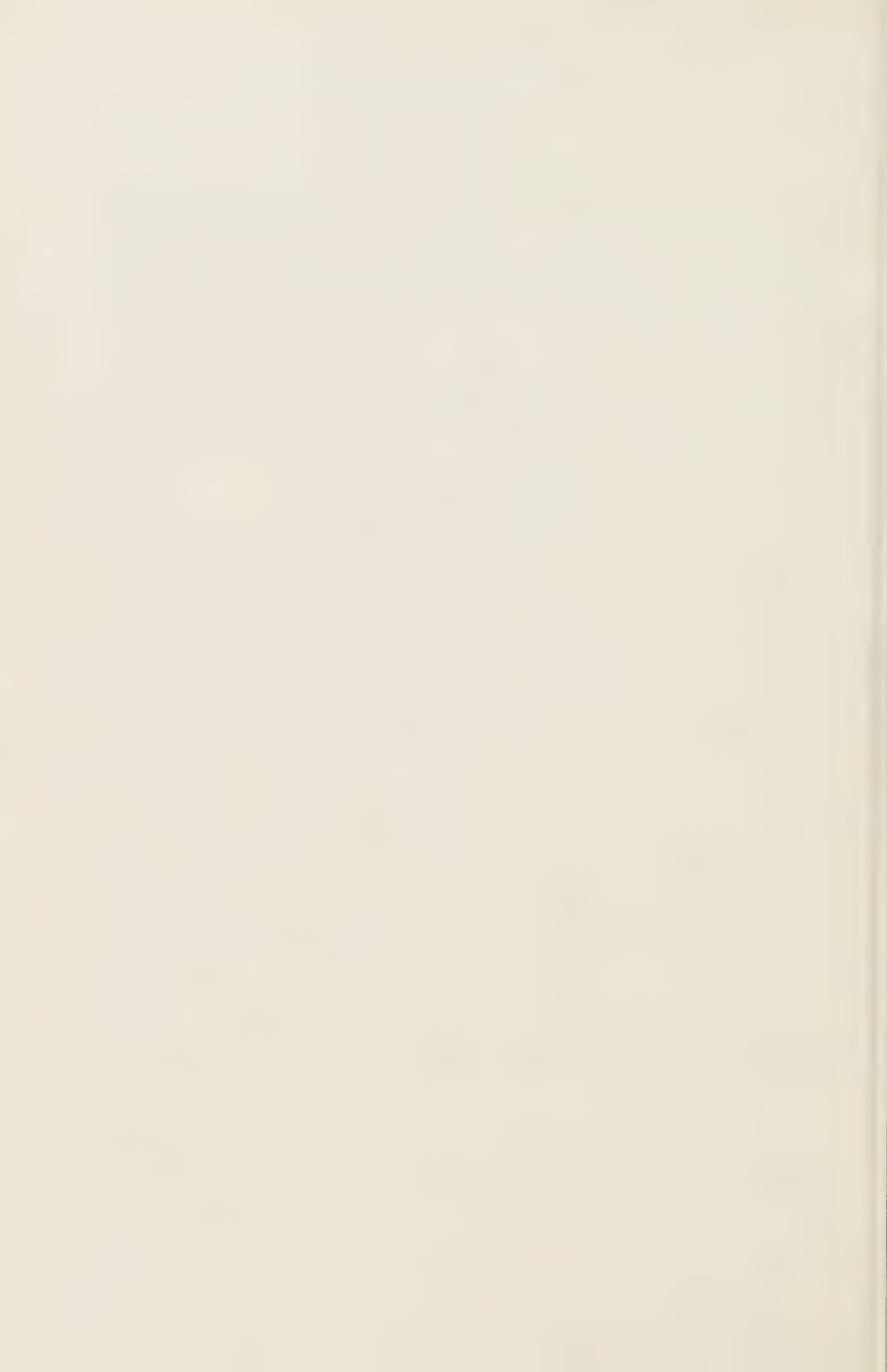
- [7] M. BAKTAVATSALOU, *Jl Phys.* [8], t. 22, 1961, p. 159.
- [8] M. BAKTAVATSALOU, *Nuovo Cim.* [10], t. 25, 1962, p. 964.
- [9] A. BARKER & V. CHRAPLYVY, *Phys. Review*, t. 89, 1953, p. 446.
- [10] S. K. BOSE, A. GAMBA & E. C. G. SUDARSHAN, *Phys. Review*, t. 113, 1959, p. 1661.
- [11] K. M. CASE, *Phys. Review*, t. 95, 1954, p. 1323.
- [12] M. CINI & B. TOUSCHER, *Nuovo Cim.* [10], t. 7, 1958, p. 422.
- [13] G. DARWIN, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. 118, 1928, p. 654.
- [14] P. A. M. DIRAC, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. 117, 1928, p. 610.
- [15] P. A. M. DIRAC, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. 118, 1928, p. 341.
- [16] E. ERIKSEN & M. KOLSRUD, *Nuovo Cim.* [10], t. 18 suppl., 1960, p. 1.
- [17] R. P. FEYNMAN & M. GELL-MANN, *Phys. Review*, t. 109, 1958, p. 193.
- [18] L. L. FOLDY, *Phys. Review*, t. 87, 1952, p. 688.
- [19] L. L. FOLDY & S. A. WOUTHUYSEN, *Phys. Review*, t. 78, 1950, p. 29.
- [20] S. TANI, *Prog. theor. Physics*, t. 6, 1951, p. 267.
- [21] C. J. GIAMBIAGI, *Nuovo Cim.* [10], t. 16, 1960, p. 202.
- [22] R. H. GOOD, *Rev. mod. Physics*, t. 27, 1955, p. 187.
- [23] T. D. LEE & C. N. YANG, *Phys. Review*, t. 105, 1957, p. 1671.
- [24] P. M. MATHEWS & A. SANKARANARAYANAN, *Prog. theor. Physics*, t. 26, 1961, p. 1.
- [25] Y. PAC, *Prog. theor. Physics*, t. 22, 1959, p. 857.
- [26] W. PAULI, *Zeits. Physik*, t. 43, 1927, p. 601.
- [27] W. PAULI, Handbuch der Physik, éd. Springer, Berlin, 1933, t. 24-1.
- [28] W. PAULI, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 6, 1936, p. 137.
- [29] M. H. L. PRYCE, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. 195, 1948, p. 62.
- [30] E. SCHRÖDINGER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 2, 1932, p. 269.
- [31] H. WEYL, *Zeits. Physik*, t. 56, 1929, p. 330.

C) Sur les particules de spin 0 ou 1

- [32] M. BAKTAVATSALOU, Thèse 3^{me} cycle, Paris, 1959.
- [33] K. M. CASE, *Phys. Review*, t. 97, 1955, p. 33.
- [34] H. FESHBACH & F. VILLARS, *Rev. mod. Physics*, t. 30, 1958, p. 24.
- [35] W. HEITLER, *Proc. Royal Irish. Ac.*, t. 49, 1943, p. 1.
- [36] H. HÖGASSEN, *Nuovo Cim.* [10], t. 21, 1961, p. 69.
- [37] N. KEMMER, *Proc. Royal Soc. [A]*, t. 173, 1939, p. 91.
- [38] G. PETIAU, *Jl Phys.* [8], t. 12, 1951, p. 112.
- [39] S. SAKATA & M. TAKETANI, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, t. 22, 1940, p. 757.
- [40] F. STROCCHI, *Nuovo Cim.* [10], t. 26, 1962, p. 955.

D) Sur les particules de spin quelconque

- [41] V. BARGMANN & E. P. WIGNER, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, t. 34, 1948, p. 211.
- [42] M. BAKTAVATSALOU, *C. r. Ac. Sc.*, t. 252, 1961, p. 2824.
- [43] G. PETIAU, *Jl Phys.* [8], t. 14, 1953, p. 501.
- [44] T. D. NEWTON & E. P. WIGNER, *Rev. mod. Physics*, t. 21, 1949, p. 400.
- [45] A. S. WIGHTMAN, *Rev. mod. Physics*, t. 34, 1962, p. 845.



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

« La théorie mathématique des propagateurs ».

Vu et approuvé :

Paris, le 12 avril 1963

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

CHAPELLE	T	Physique (Orsay).	SCHNELL	Botanique tropicale (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).	SIOLKOWSKI	Physiologie générale.
DENY	T	Mathématiques Gén. (Orsay)	ACHER	Chimie Biologique (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.	BAUDOIN	Biologie animale (P.C.B.).
LUCAS G.	T	Géologie.	BEAUMONT	Biologie animale (S.P.C.N.).
ALLARD	T	Chimie Physique.	BLAMONT	Géophysique Ionosphère.
BERTHELOT	T	Physique Fondamentale des Hautes Energies (Orsay).	BOURREAU	Botanique.
BRICART	T	Météorologie et Physique de l'Atmosphère.	CURIE D.	Physique (M.G.P.).
M ^{me} ALBE-FESSARD		Psychophysiologie.	DURAND-DELGA ..	Géologie.
FRIEDEL		Physique des Solides (Orsay).	FREON	T Chimie organique (Orsay).
M. JULIA		Etudes des molécules naturelles complexes.	HELLER	Physiologie végétale.
LENDER	T	Biologie Animale (S. P. C. N.) (Orsay).	TORRAT	Calcul des Probabilités.
MAGAT		Physico-chimie des Radio-éléments.	CAILLEUX	Géologie (S.P.C.N.).
M ^{lle} QUINTIN	T	Electrochimie.	T MAGNAN	Physiologie (S.P.C.N.).
MONOD	T	Chimie du métabolisme.	T DAUDEL	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
BENOIT	T	Physiologie animale (Orsay).	M ^{lle} FOURCROY ..	Biologie végétale (S.P.C.N.).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.	M ^{me} CHOQUET-BRU-	T Méc. Analytique et Méc. Céleste.
CHARLOT	T	Chimie analytique.	HAT.	
HAISSINSKY	T	Radiochimie.	M ^{lle} VEIL	Physiologie Générale.
LEMÉE	T	Physiol. Vég. (B. M. P. V.) (Orsay).	LWOFF	T Microbiologie.
GUÉRIN	T	Chimie (M. P. C.) (Orsay).	SIESTRUNCK	T Méc. Phys. et expériment.
CHATELET M.		Chimie (P. C. B.).	LACOMBE	T Métallur. des métaux nucl.
JEAN	T	Physique Nucleaire (Orsay).	BROCHARD	T Physique P.C.B. (Orsay).
MATTLER	T	Physique (S. P. C. N.).	CABANNES	T Mécanique générale.
MICHEL L.		Physique théorique des Hautes Energies (Orsay).	LESIEUR	T Mathémat. M. P. C. (Orsay).
BERGERARD		Zoologie (Orsay).	MAZET	T Mécanique générale (Orsay).
BERTIN		Electronique (Orsay).	CAIRE	Géographie phys. et Géol. dynamique.
BOUSSIÈRES		Chimie des Radioéléments (Orsay).	COMOLET	Mécanique des Fluides.
M ^{me} COUTURE		Thermodynamique et Méc. Physique.	CORABOEUF	Physiologie Animale.
ELLENBERGER		Géologie appli. sur le terr.	DELLOUE	Physique de l'exosphère.
FRANC.		Biologie animale (P.C.B.).	GORENLOT	Botanique II (Orsay).
			HOUILLOIN	Biologie Animale (P.C.B.).
			JULLIEN J.	Chimie (P.C.B.).
			MALGRANGE	Techn. Math. de la Phys.
			OLIVIER	Antropologie.
			NOZERAN	T Botanique II (Orsay).
			BLANC-LAPIERRE. .	Physique E.N.S. (Orsay).

Secrétaire Général..... R. POULLAIN

